W. KECS * P. P. TEODORESCU

INTRODUCERE ÎN TEORIA DISTRIBUȚIILOR CU APLICAȚII ÎN TEHNICĂ

Scanned with OKEN Scanner

W. KECS
P. P. TEODORESCU

INTRODUCERE IN TEORIA DISTRIBUȚIILOR CU APLICAȚII IN TEHNICĂ

EDITURA TEHNICĂ
București — 1975

Scanned with OKEN Scanner

Teoria distribuțiilor reprezintă un instrument matematic puternic, adecvat soluționării unei clase largi de probleme care nu pot fi rezolvate cu ajutorul analizei matematice clasice. Ea permite să se justifice procedee și rezultate ce pot fi formulate astfel într-o formă unitară și generală.

Lucrarea cuprinde, la început, elemente generale de teoria distribuțiilor, precum și un studiu al ecuațiilor diferențiale în distribuții, împreună cu o prezentare a unor metode mai importante de rezolvare a problemelor la limită. În continuare, se trece la reprezentarea unor mărimi mecanice și fizice cu ajutorul distribuțiilor; această reprezentare pune în evidență unitatea dintre modul de exprimare matematică a fenomenelor continue și modul de exprimare matematică a fenomenelor discontinue. Sînt date apoi aplicații în mecanică, fizică și electrotehnică, unde utilizarea distribuțiilor își dovedește eficacitatea.

Lucrarea este adresată unui cerc larg de cititori, care utilizează metode matematice în lucrările lor, în special celor care au de rezolvat ecuații diferențiale și ecuații integrale: ingineri din diferite ramuri, care lucrează în proiectare și cercetare, mecanicieni, fizicieni, studenți din institute de învățămînt superior etc.

Recenzie: acad. prof. **Miron Nicolescu**
Control științific: prof. dr. docent **Romulus Cristescu** membru corespondent al Academiei R. S. România

Redactor: **Valentina Bucur**
Tehnoredactor: **Elena Geru**
Coperta seriei: **Constantin Guluță**

Bun de tipar: 7.05.1975. Coli de tipar: 25,75 tiraj: 4 300 + 90 exemplare broșate. C.Z. 517.62

---

c. 2105 — I. P. INFORMAȚIA
str. Brezoianu nr. 23—25
București

Scanned with OKEN Scanner

Făurirea unei economii moderne, de înaltă eficiență, impune promovarea în toate ramurile acesteia a cuceririlor științei și tehnologiei avansate. În cadrul integrării dintre învățămînt, cercetare și producție, un rol important îl joacă introducerea unui aparat matematic modern în învățămînt și utilizarea celor mai noi rezultate ale cercetării matematice în studiul științelor naturii, în științele tehnice sau în producție.

Într-adevăr, rezolvarea multor probleme teoretice și practice este strîns legată de metodologia de abordare a acestora, precum și de instrumentul matematic utilizat. În descrierea matematică a fenomenelor fizice și în rezolvarea problemelor la limită corespunzătoare, pot apărea dificultăți, datorită condițiilor suplimentare impuse uneori chiar de limitele de aplicabilitate ale instrumentului matematic folosit; în general, aceste condiții pot să nu fie necesare și să nu fie legate de fenomenul fizic considerat.

Printre metodele care se folosesc în mod obișnuit se pot menționa metodele analizei matematice clasice; posibilitățile acestor metode sînt însă adesea limitate. Astfel, faptul că nu orice funcție continuă este derivabilă constituie o restricție severă, legată de instrumentul matematic; ea afectează unitatea și generalitatea rezultatelor. Teoria distribuțiilor reprezintă un instrument matematic puternic, adecvat soluționării unei clase largi de probleme (ce nu pot fi rezolvate cu ajutorul analizei matematice clasice), prin eliminarea restricțiilor care nu sînt impuse de fenomenul fizic. Această teorie permite să se justifice procedee și rezultate, care pot fi formulate astfel într-o formă unitară și generală.

Lucrarea cuprinde, la început, elemente de teoria distribuțiilor, teoreme cu posibilități de aplicare, fără a pune un accent deosebit pe demonstrarea lor, cu toate că rigurozitatea

Scanned with OKEN Scanner

matematică este în întregime respectată. În lucrare se prezintă: derivarea distribuţiilor, şiruri reprezentative δ, produsul direct şi produsul de convoluţie, distribuţii concentrate pe curbe, suprafeţe şi volume, distribuţii omogene, transformări integrale în distribuţii, precum şi diferite formule utile în practica de calcul. Un accent deosebit se pune pe posibilităţile de aplicare ale acestei teorii în studiul ecuaţiilor diferenţiale ordinare şi cu derivate parţiale, precum şi în studiul ecuaţiilor de convoluţie, ecuaţii ce se întîlnesc în mecanică, fizică şi tehnică. De asemenea, se pune un accent deosebit pe metodologia de rezolvare a problemelor la limită ce apar (probleme Cauchy, probleme polilocale etc.).

În continuare se trece la reprezentarea unor mărimi mecanice şi fizice (vectori legaţi, sarcini concentrate, momente ale unui sistem de puncte materiale, mărimi electrice) cu ajutorul distribuţiilor; această reprezentare pune în evidenţă unitatea dintre modul de exprimare matematică a fenomenelor continue şi modul de exprimare matematică a fenomenelor discontinue. Se dau apoi aplicaţii în mecanică (teoreme generale, probleme de tip Cauchy pentru punctul material, oscilatorul liniar, bare şi fire, precum şi probleme la limită ale teoriei distribuţiilor), fizică (acustică — efectul Doppler, optică — fenomenul de difracţie, studiul cîmpului electrostatic — intensitate şi potenţial) şi electrotehnică (intensitatea şi sarcina curentului electric, impedanţa şi admitanţa circuitelor electrice, frecvenţe negative, circuite electrice, fenomene permanente şi fenomene tranzitorii, sisteme dinamice liniare — cvadripoli, sisteme staţionare, circuite de diferenţiere etc.). Sînt alese unele probleme caracteristice, unde utilizarea distribuţiilor îşi dovedeşte eficacitatea.

Observăm că în studiul diferitelor probleme nu s-a pus accentul pe fenomenul mecanic şi fizic sau pe problema tehnică respectivă, cu toate că — pe lîngă prezentarea într-o formă matematică riguroasă a unor rezultate cunoscute — se dă un mare număr de rezultate noi. S-a considerat că cel mai important lucru este să se prezinte o metodologie de abordare a problemelor, să se exemplifice această metodologie şi să se pună în evidenţă diferitele ei aspecte, ca şi dificultăţile ce pot apărea.

Scopul lucrării este de a atrage atenția asupra posibilităților de a utiliza un aparat matematic modern în studiul unor fenomene mecanice și fizice sau în tehnică; în felul acesta, ea se adresează unui cerc larg de cititori, care utilizează metode matematice în lucrările lor, în special celor care au de rezolvat ecuații diferențiale: ingineri din diferite ramuri, care lucrează în proiectare sau cercetare, mecanicieni, fizicieni, studenți din institute de învățământ superior etc.

23 aprilie 1975

AUTORII

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

1. **Elemente de teoria distribuţiilor** 11

1.1. Noţiunea de distribuţie. Proprietăţi. Operaţii 11
1.1.1. Introducere 11
1.1.2. Funcţii şi spaţii fundamentale 14
1.1.3. Spaţiul distribuţiilor 24
1.1.4. Exemple de distribuţii 27
1.1.5. Transformări liniare de variabile 31
1.1.6. Egalitatea distribuţiilor 34
1.2. Derivarea distribuţiilor. Şiruri reprezentative δ 48
1.2.1. Derivarea distribuţiilor 48
1.2.2. Formule de descompunere a unor distribuţii 69
1.2.3. Şiruri reprezentative δ 74
1.3. Produsul direct. Produsul de convoluţie 84
1.3.1. Produsul direct 84
1.3.2. Produsul de convoluţie 88
1.4. Distribuţii concentrate pe curbe, suprafeţe şi volume. Distribuţii omogene 95
1.4.1. Distribuţii concentrate pe curbe, suprafeţe şi volume 95
1.4.2. Distribuţii omogene 102
1.5. Transformări integrale în distribuţii 108
1.5.1. Transformata Fourier 108
1.5.2. Transformata Laplace 122
1.6. Formule utile 134
1.6.1. Derivate ale unor distribuţii uzuale 134
1.6.2. Transformate Fourier ale unor distribuţii uzuale . . 137
1.6.3. Transformate Laplace ale unor distribuţii uzuale . . 141

2. **Ecuaţii diferenţiale în distribuţii** 145

2.1. Ecuaţii diferenţiale ordinare 145
2.1.1. Rezultate generale. Soluţii fundamentale 145
2.1.2. Metode de calcul 158
2.2. Ecuaţii de convoluţie 168
2.2.1. Ecuaţii de convoluţie 168
2.2.2. Ecuaţii integrale 177
2.3. Problema Cauchy şi probleme polilocale pentru ecuaţii diferenţiale 188
2.3.1. Ecuaţii diferenţiale ordinare 188
2.3.2. Ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale 194

Scanned with OKEN Scanner

3. Reprezentarea prin distribuţii a unor mărimi mecanice şi fizice 223

3.1. Reprezentarea prin distributii a vectorilor legaţi 223
3.1.1. Reprezentarea unui vector legat 223
3.1.2. Compunerea vectorilor legaţi 228
3.2. Reprezentarea prin distribuţii a sarcinilor concentrate . 232
3.2.1. Momente concentrate. 233
3.2.2. Dipoli de forte concentrate 246
3.3. Reprezentarea prin distribuţii a momentelor unui sistem de puncte materiale 255
3.3.1. Sisteme discrete de puncte materiale 255
3.3.2. Sisteme continue de puncte materiale 262
3.4. Reprezentarea prin distribuţii a unor mărimi electrice . . 269
3.4.1. Sarcini electrice 269
3.4.2. Stratul electric pe o curbă sau pe o suprafaţă 273

4. Aplicaţii ale teoriei distribuţiilor în mecanică 280

4.1. Teoremele generale ale mecanicii 280
4.1.1. Mărimi mecanice reprezentate prin distribuţii . . . 280
4.1.2. Teoremele generale ale mecanicii pentru un punct material 287
4.1.3. Teoremele generale ale mecanicii în cazul ciocnirilor electrice 290
4.2. Probleme de tip Cauchy 294
4.2.1. Dinamica punctului material 294
4.2.2. Oscilatorul liniar 299
4.2.3. Fire. Bare 305
4.3. Probleme la limită ale teoriei elasticităţii 315
4.3.1. Probleme statice ale corpurilor liniar elastice 315
4.3.2. Probleme dinamice ale corpurilor liniar elastice . . 328

5. Aplicaţii ale teoriei distribuţiilor în fizică 342

5.1. Aplicaţii ale teoriei distribuţiilor în acustică 342
5.1.1. Efectul Doppler pentru unda sonoră unidimensională 342
5.1.2. Efectul Doppler în prezenţa vîntului 344
5.2. Aplicaţii ale teoriei distribuţiilor în optică 348
5.2.1. Fenomenul de difracţie la infinit 349
5.2.2. Difracţia de tip Fresnel 352
5.3. Intensitatea şi potenţialul cîmpului electrostatic 354
5.3.1. Relaţii între intensitatea, potenţialul şi densitatea volumică a unei sarcini electrice 354
5.3.2. Cazul unui strat electric pe o suprafaţă 359

6. Aplicaţii ale teoriei distribuţiilor în electrotehnică 361

6.1. Intensitatea şi sarcina curentului electric. Impedanţa şi admitanţa circuitelor electrice 362

Scanned with OKEN Scanner

6.1.1. Intensitatea și sarcina curentului electric 361
6.1.2. Impedanța și admitanța circuitelor electrice 365
6.1.3. Frecvențe negative 373
6.2. Aplicații ale teoriei distribuțiilor la circuite electrice . . . 378
6.2.1. Problema Cauchy pentru un circuit R.L.C. 378
6.2.2. Fenomene permanente. Fenomene tranzitorii 384
6.3. Aplicații ale teoriei distribuțiilor la sisteme dinamice liniare 393
6.3.1. Cvadripoli 393
6.3.2. Sisteme staționare 397
6.3.3. Circuit de diferențiere 408
Bibliografie 410

Scanned with OKEN Scanner

ELEMENTE DE TEORIA DISTRIBUȚIILOR

1.1. Noțiunea de distribuție. Proprietăți. Operații

1.1.1. *Introducere*

1.1.1.1. Funcția unitate. Funcția delta

Distribuțiile sau *funcțiile generalizate* au apărut ca urmare a dificultăților întîlnite în rezolvarea unor probleme de fizică matematică, mecanică cuantică, electromagnetism etc., unde — alături de funcții continue, prin care se exprimau mărimi continuu repartizate ca masa, sursele termice, impulsul mecanic etc. — trebuiau utilizate funcții discontinue, precum și simboluri pentru mărimi concentrate (de exemplu, masa punctiformă, sursa punctiformă de căldură, impulsul concentrat etc.).

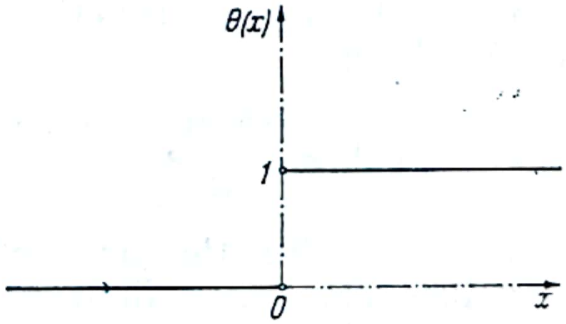


Fig. 1.1.

Dintre funcțiile discontinue un rol important l-a avut funcția unitate $\theta(x)$, definită sub forma (fig. 1.1)

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } x < 0, \\ 1 \text{ pentru } x \geqslant 0; \end{cases} \tag{1.1.1}$$

această funcție a fost introdusă în 1898 de inginerul englez Oliver Heaviside, fiind utilizată în mod curent la rezolvarea pe cale operațională a unor ecuații diferențiale ce descriu fenomene legate de circuite electrice.

În mecanica cuantică, fizicianul englez P.A.M. Dirac introduce, în 1926, simbolul δ, denumit *funcția delta*, care constituie prima funcție generalizată (distribuție) utilizată în mod sistematic. Din punct de vedere fizic, distribuția $\delta(x)$ a lui Dirac — denumită și *funcția impuls* — reprezintă densitatea unei sarcini egală cu unitatea și situată în originea axelor de coordonate; dacă această sarcină punctiformă este m, densitatea ei va avea expresia

$$\rho(x) = m\,\delta(x). \tag{1.1.2}$$

De aici rezultă că simbolul $\delta(x)$ se bucură de proprietățile

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x \neq 0, \\ \infty & \text{pentru } x = 0, \end{cases} \tag{1.1.3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1; \tag{1.1.3'}$$

se observă astfel că acest simbol nu reprezintă o funcție, deoarece nu există nici o funcție care să îndeplinească condițiile (1.1.3), (1.1.3'). S-a creat astfel un formalism privind utilizarea funcției δ cu ajutorul căruia au putut fi studiate, în mod simplu, diferite fenomene discontinue; între altele, s-a observat că între funcția unitate $\theta(x)$ și funcția $\delta(x)$ există relația

$$\delta(x) = \frac{d\,\theta(x)}{dx}, \tag{1.1.4}$$

deoarece nu există nici o funcție care, evident, nu are sens în cadrul analizei clasice, ea fiind adevărată numai în sensul teoriei distribuțiilor.

1.1.1.2. Scurt istoric

Un alt domeniu care a condus la elaborarea unei teorii privind distribuțiile îl constituie ecuațiile diferențiale ordinare și cu derivate parțiale; astfel, S. L. Sobolev intro-

Scanned with OKEN Scanner

duce, în 1936, noţiunea de soluţie generalizată pentru ecuaţiile diferenţiale cu derivate parţiale de tip hiperbolic. De asemenea, se introduc şi alte noţiuni noi : părţi finite ale integralelor divergente, derivate formale în cazul transformatelor Fourier etc., prin a căror sinteză se creează o teorie unitară a distribuţiilor ; astfel, L. Schwartz publică, în 1950—1951, un tratat în două volume, în care se face o expunere sistematică şi generală a teoriei distribuţiilor, justificîndu-se din punct de vedere matematic formalismul de calcul utilizat cu distribuţiile în diferite domenii ale mecanicii, fizicii şi tehnicii.

Avînd la bază metodele analizei funcţionale, teoria distribuţiilor a stimulat dezvoltarea multor capitole ale matematicii (teoria ecuaţiilor diferenţiale, calculul operaţional, analiza Fourier etc.) cu largi aplicaţii în domenii foarte veriate. Teoria distribuţiilor a cunoscut apoi o dezvoltare considerabilă şi prin lucrările de sinteză publicate de J. Mikusinski şi R. Sikorski, I. M. Ghelfand şi G. E. Şilov, L. Hörmander, A. H. Zemanian, H. Bremermann etc. Literatura română în această direcţie este reprezentată de monografiile lui Gh. Marinescu, R. Cristescu şi W. Kecs şi P. P. Teodorescu.

L. Schwartz introduce distribuţiile folosind metoda funcţionalelor liniare ; J. Mikusinski şi R. Sikorski introduc distribuţiile cu ajutorul şirurilor fundamentale de funcţii continue, folosind în acest scop principiul abstractizării. Această ultimă metodă este analoagă cu metoda lui R. Dedekind de introducere a numerelor reale drept tăieturi în mulţimea numerelor raţionale ; în acest fel apare evident că noţiunea de distribuţie constituie o generalizare a noţiunii de funcţie, ceea ce justifică şi termenul de funcţie generalizată, care se mai utilizează. Pe de altă parte, această metodă corespunde spiritului analizei clasice, fapt pentru care ea a avut largi aplicaţii în fizică.

Mai trebuie să remarcăm că atît distribuţia δ, cît şi alte distribuţii utilizate la rezolvarea a diferite probleme de mecanică, fizică sau tehnică nu apar în rezultatele finale, ci numai în calculele intermediare ; de fiecare dată, aceste distribuţii sînt asociate cu anumite funcţii, prin intermediul cărora se exprimă — în ultimă instanţă — dife-

Scanned with OKEN Scanner

ritele lor proprietăţi. Aceasta ne arată că în realitate, fiecărei distribuţii i se ataşează o anumită funcţională, introducerea distribuţiilor pe calea funcţionalelor liniare făcîndu-se astfel în mod natural; această metodă se dovedeşte a fi eficientă, atît din punctul de vedere al modelării fenomenelor fizice, cît şi din punctul de vedere al calculului. Pe această cale vom introduce, în cele ce urmează, noţiunea de distribuţie.

1.1.2. *Funcţii şi spaţii fundamentale*

1.1.2.1. Spaţiul fundamental K^m

Fie R^n *spaţiul euclidian real* n-dimensional şi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ puncte ale acestui spaţiu; *produsul scalar* va fi definit prin relaţia

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \qquad (1.1.5)$$

iar *norma* va fi precizată de

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = |x|. \qquad (1.1.5')$$

Distanţa dintre punctele x şi y este dată de relaţia

$$d(x, y) = \|x - y\|. \qquad (1.1.6)$$

Definiţia 1.1.1. *Spaţiul fundamental* K^m este constituit din funcţiile reale $\varphi(x)$, numite *funcţii fundamentale*, de clasa C^m (adică avînd derivate continue de ordin maxim m), nule împreună cu toate derivatele lor pînă la ordinul m inclusiv în exteriorul unor domenii mărginite, proprii fiecărei funcţii.

Aceste domenii, împreună cu frontierele lor, determină *suporturile funcţiilor fundamentale* care se vor nota supp $\varphi(x)$. Suportul funcţiei $\varphi(x)$ va fi definit ca închiderea mulţimii punctelor x pentru care $\varphi(x) \neq 0$; astfel, dacă $x_0 \in \text{supp } \varphi(x)$, atunci, oricare ar fi vecinătatea V a lui x_0, există un punct $x \in V$ pentru care $\varphi(x) \neq 0$. Deoarece suportul funcţiei $\varphi(x)$ este mărginit, rezultă

că acesta este o *mulțime compactă* (mulțime mărginită și închisă); spunem astfel că suportul funcției $\varphi(x)$ este compact. Putem deci afirma că funcțiile $\varphi(x) \in K^m$ sînt funcții cu derivate continue de ordin maxim m și cu *suport compact.*

Spațiul fundamental K^m formează un *spațiu vectorial* (*liniar*), deoarece dacă $\varphi_1, \varphi_2 \in K^m$ și $\alpha, \beta \in R$, atunci $\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \in K^m$. Pentru ca acest spațiu să devină un *spațiu topologic*, vom defini convergența către zero (printr-o translație se poate trece la convergenta într-un punct oarecare) a șirului de funcții $\varphi_k(x) \in K^m$, $k \in N_0$, prin* următoarele condiții:

a) $\operatorname{supp}\ \varphi_k(x) \subset |x| \leqslant a$,

b) $\mathrm{D}^p \varphi_k(x) \overset{u}{\Rightarrow} 0, \mathrm{D}^p = \dfrac{\partial^{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}}{\partial x_1^{p_1}\, \partial x_2^{p_2} \ldots \partial x_n^{p_n}}$,

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n \leqslant m;$$

în acest caz

$$\lim_{k \to \infty} \varphi(x) = 0. \tag{1.1.7}$$

Deci expresia (1.1.7) este echivalentă cu condițiile *a*) și *b*), dintre care prima ne arată că suportul fiecărui termen al șirului de funcții $\varphi_k(x) \in K^m$ este inclus într-o sferă cu centrul în origine și de rază a (sferă n-dimensională), iar a doua ne arată că acest șir de funcții, împreună cu derivatele lor pînă la ordinul m inclusiv, converge uniform în sens obișnuit către zero. În felul acesta, mulțimea funcțiilor $\varphi(x) \in K^m$, cu convergența mai sus definită, formează un *spațiu vectorial topologic.*

Dacă definim norma în spațiul K^m prin

$$\|\varphi(x)\|_m = \sup_{p \leqslant m,\ |x| \leqslant a} |\mathrm{D}^p \varphi(x)|, \tag{1.1.8}$$

atunci condiția b) de convergență uniformă către zero se poate scrie sub forma

b′) $$\lim_{k \to \infty} \|\varphi_k(x)\|_m = 0.$$

---

* $N_0 = N - \{0\}$.

Fie funcţia (fig. 1.2)

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{x-a}{b-a}\pi & \text{pentru} \quad x \in [a, b], \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases} \tag{1.1.9}$$

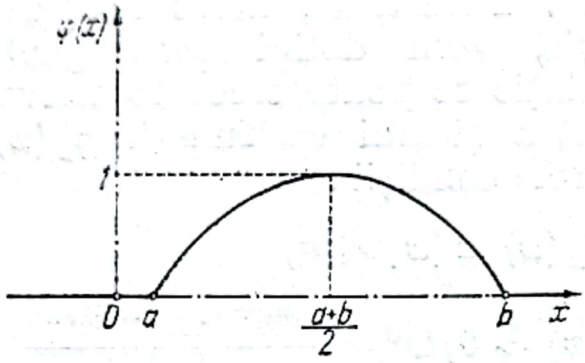


Fig. 1.2.

Observăm că această funcţie este continuă în orice punct şi are suportul compact (intervalul $[a, b]$); în ceea ce priveşte derivabilitatea, cu excepţia punctelor a şi b, această funcţie este indefinit derivabilă şi putem scrie

$$\varphi'(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{b-a} \cos \dfrac{x-a}{b-a}\pi & \text{pentru} \quad x \in (a, b), \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

Într-adevăr, pentru derivatele laterale în punctele a şi b obţinem

$$\varphi'_s(a) = 0, \qquad \varphi'_d(a) = \frac{\pi}{b-a},$$

$$\varphi'_s(b) = -\frac{\pi}{b-a}, \quad \varphi'_d(b) = 0,$$

ceea ce înseamnă că funcţia considerată nu este derivabilă în aceste puncte. În consecinţă, funcţia (1.1.9) este continuă, avînd suportul compact $[a, b]$; ea aparţine spaţiului fundamental K^0.

Scanned with OKEN Scanner

În mod analog, funcţia (fig. 1.3)

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin^2 \dfrac{x-a}{b-a}\pi & \text{pentru } x \in [a,\ b], \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

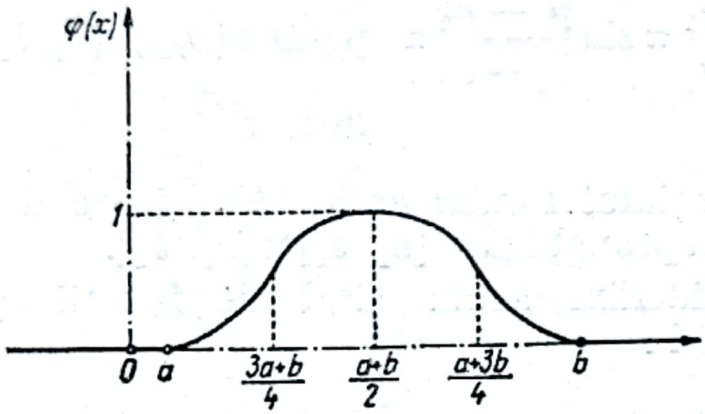


Fig. 1.3.

este continuă împreună cu derivatele de ordinul întîi, avînd ca suport intervalul $[a, b]$; ea nu admite derivate de ordinul al doilea în punctele a şi b, deşi în rest este indefinit derivabilă. Prin urmare, $\varphi(x) \in K^1(a, b)$.

În general, se poate demonstra — prin metoda inducţiei complete — că funcţia

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin^{m+1} \dfrac{x-a}{b-a}\pi & \text{pentru } x \in [a, b), \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \tag{1.1.10}$$

este o funcţie fundamentală, aparţinînd spaţiului $K^m(a, b)$.

Plecînd de la aceste funcţii fundamentale, putem construi alte funcţii aparţinînd aceluiaşi spaţiu fundamental; astfel, dacă $\varphi(x) \in K^m$, iar $f(x)$ este o funcţie de clasa C^m, atunci $\psi(x) = f(x)\varphi(x) \in K^m$.

Funcţia

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} \sin^{m+1} \dfrac{x_i - a_i}{b_i - a_i}\pi & \text{pentru } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D_n, \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \tag{1.1.11}$$

este o funcție de n variabile, aparținînd spațiului K^m și avînd suportul $D_n = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$. În particular, funcția

$$\varphi(x, y) =$$

$$= \begin{cases} \sin \dfrac{x - a_1}{b_1 - a_1} \pi \sin \dfrac{y - a_2}{b_2 - a_2} \pi & \text{pentru } (x, y) \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2], \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

aparține spațiului fundamental K^0 și are drept suport domeniul dreptunghiular $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$.

Să considerăm acum șirul de funcții $\varphi_n(x) \in K^m$, definite astfel:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} \sin^{m+1} \dfrac{x + a}{2a} \pi & \text{pentru } x \in [-a, a], \\ 0 & \text{în rest;} \end{cases} \tag{1.1.12}$$

evident, supp $\varphi_n(x) = [-a, a]$ pentru orice n. Acest șir, împreună cu derivatele sale pînă la ordinul m inclusiv, converge uniform către zero; pe de altă parte, suporturile tuturor termenilor șirului sînt mărginite. Prin urmare, șirul (1.1.12) converge către zero în spațiul fundamental K^m.

În schimb, șirul de funcții

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} \sin^{m+1} \dfrac{\dfrac{x}{n} + a}{2a} \pi & \text{pentru } \dfrac{x}{n} \in [-a, a], \\ 0 & \text{în rest,} \end{cases}$$

deși converge uniform către zero, împreună cu derivatele sale pînă la ordinul m inclusiv, nu reprezintă un șir convergent către zero în spațiul K^m, deoarece supp $\varphi_n(x) = [-na, na]$; astfel, suporturile funcțiilor $\varphi_n(x)$ nu sînt mărginite pentru $n \to \infty$, iar condiția a) de convergență nu este îndeplinită.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă în spaţiul K^m considerăm $m = \infty$, obţinem *spaţiul fundamental* K, care cuprinde funcţiile indefinit derivabile (de clasă C^∞) cu suport compact. În ceea ce priveşte convergenţa către zero în spaţiul K, aceasta se defineşte ca şi în spaţiul K^m, cu deosebire că şirul de funcţii funda-

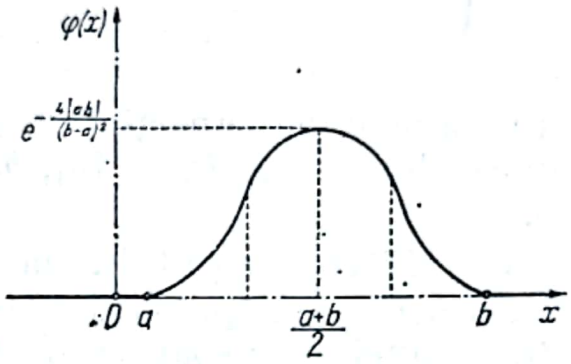


Fig. 1.4.

mentale, împreună cu toate derivatele sale de orice ordin, converge uniform către zero, adică

$$\lim \|\varphi_k(x)\|_m = 0 \text{ pentru orice } m. \qquad (1.1.13)$$

Fie funcţia (fig. 1.4)

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{|a\,b|}{(x-a)(b-x)}} & \text{pentru } x \in (a.\,b), \\ 0 & \text{în rest;} \end{cases} \qquad (1.1.14)$$

se constată uşor că această funcţie este indefinit derivabilă, avînd suportul compact $[a,\ b]$. În punctele a şi b, funcţia $\varphi(x)$ împreună cu derivatele ei de orice ordin este nulă; prin urmare, graficul funcţiei are un contact de ordin infinit cu axa absciselor în aceste puncte.

În mod analog, în spaţiul euclidian R^n putem considera funcţia indefinit derivabilă

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2 - r^2}} & \text{pentru } r < a, \\ 0 & \text{pentru } r \geqslant a, \end{cases} \qquad (1.1.15)$$

unde $r = |x|$; suportul acestei funcţii este sfera n-dimensională cu centrul în origine, $|x| \leqslant a$, astfel încît ea aparţine spaţiului fundamental K.

De asemenea, funcţia

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{|a_i\, b_i|}{(x_i - a_i)\,(b_i - x_i)}} & \text{pentru } x_i \in (a_i, b_i), \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \tag{1.1.16}$$

este o funcţie fundamentală, aparţinînd spaţiului K şi avînd drept suport domeniul $D_n = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$.

Dacă notăm cu $K^m(D)$ spaţiul fundamental cuprinzînd funcţiile de clasă C^m cu suportul inclus în compactul n-dimensional D, atunci între spaţiile $K^m(D)$, K^m, $K(D)$ şi K există relaţiile

$$K^m(D) \subset K^m, \quad K(D) \subset K \subset K^m \subseteq K^0, \tag{1.1.17}$$

$$\bigcup_D K^m(D) = K^m, \quad \bigcup_D K(D) = K, \quad \bigcap_m K^m = K, \tag{1.1.17'}$$

unde reuniunile se efectuează după toate compactele D.

Teorema 1.1.1. *Dacă E este o mulţime compactă din R_n, conţinută în mulţimea deschisă F, atunci există o funcţie fundamentală $\varphi(x)$ egală cu unitatea pe E, nulă în exteriorul lui F şi cuprinsă între 0 şi 1 în rest.*

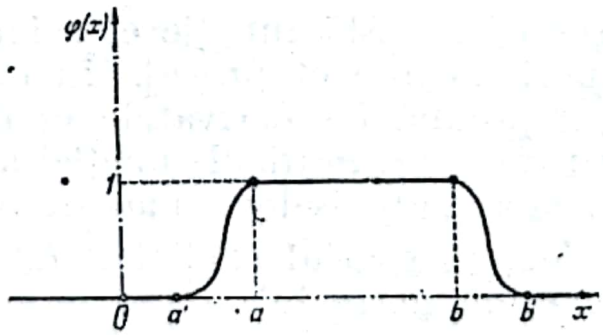


Fig 1.5.

În fig. 1.5 redăm graficul acestei funcţii pentru $n = 1$ (compactul $E = [a, b]$, $F = (a', b') \supset [a, b]$).

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 1.1.2. *Dacă* $\varphi(x) \in K$ *iar* U_k, $(k = 1,2, \ldots, N)$, *reprezintă un număr finit de vecinătăţi ce acoperă suportul funcţiei* $\varphi(x)$, *atunci există funcţiile* $e_k(x) \in K$, *astfel încît*

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} \varphi(x)\, e_k(x), \quad \text{supp } e_k(x) \subset U_k; \quad (1.1.18)$$

observăm că funcţiile $e_k(x) \in [0,1]$ *sînt nule în exteriorul domeniilor* U_k *şi îndeplinesc relaţia*

$$\sum_{k=1}^{N} e_k(x) = 1. \quad (1.1.19)$$

Această ultimă proprietate constituie *teorema partiţiei unităţii*, fiind utilizată frecvent pentru demonstrarea proprietăţilor locale ale distribuţiilor, ca şi a operaţiilor cu acestea.

Relaţia (1.1.18) se mai poate scrie şi sub forma

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} \varphi_k(x), \quad \varphi_k(x) \in K, \quad \text{supp } \varphi_k(x) \subset U_k.$$

Teorema rămîne valabilă pentru $N = \infty$.

Teorema 1.1.3. *Fie* $\varphi(x, y) \in K(R^{n+m})$, $x \in R^n$, $y \in R^m$; *atunci există un şir* $\varphi_k(x,y) = \sum_{i=1}^{N} u_{ik}(x)\, v_{ik}(x)$, *cu* $u_{ik}(x) \in K(R^n)$, $v_{ik}(y) \in K(R^m)$, *care converge către* $\varphi(x, y)$ *pentru* $k \to \infty$.

Aceasta înseamnă că mulţimea funcţiilor fundamentale

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{N} u_i(x)\, v_i(y), \quad \text{cu} \quad u_i(x) \in K(R^n), \quad v_i(y) \in K(R^m),$$

este densă în R^{n+m}.

Observăm, în sfîrşit, că funcţia $\varphi(x) = C$, $C = \text{const} \neq 0$, nu reprezintă o funcţie fundamentală, deoarece, cu toate că este indefinit derivabilă, nu are suport compact. În schimb, funcţia $\varphi(x) = 0$ este o funcţie fundamentală.

Scanned with OKEN Scanner

1.1.2.3. Spaţiul fundamental S

Printr-o lărgire a spaţiului K se ajunge la spaţiul fundamental S; prin definiţie, acest spaţiu cuprinde toate funcţiile $\varphi(x)$ de clasa C^∞, care pentru $|x| \to \infty$ tind la zero, împreună cu derivatele lor de orice ordin, mai repede decît orice putere a lui $\frac{1}{|x|}$. Aceste funcţii verifică relaţia

$$|x^k \, \mathrm{D}^q \, \varphi(x)| \leqslant C_{kq}, \tag{1.1.20}$$

unde

$$x^k = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}, \quad \mathrm{D}^q = \frac{\partial^{q_1 + q_2 + \ldots + q_n}}{\partial x_1^{q_1} \partial x_2^{q_2} \ldots \partial x_n^{q_n}}, \tag{1.1.20'}$$

$C_{kq} = C_{k_1 k_2 \ldots k_n q_1 q_2 \ldots q_n}$ $(k_1, k_2, \ldots, k_n, q_1, q_2, \ldots, q_n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Definiţia 1.1.2. Şirul de funcţii $\varphi_k(x) \in S$ *converge* către funcţia $\varphi(x) \in S$ dacă, pentru orice α, β,

$$x^\beta \, \mathrm{D}^\alpha \, \varphi_k(x) \Rightarrow x^\beta \, \mathrm{D}^\alpha \, \varphi(x) \text{ pentru } x \in R, \; k \to \infty; \tag{1.1.21}$$

$C_{\alpha\beta}$ nu depind de k.

Spaţiul S este un spaţiu liniar deoarece, pentru orice $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ şi $\varphi_1, \varphi_2 \in S$, avem $\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 \in S$.

Observăm că spaţiul S este mai larg decît spaţiul K ($K \subset S$), deoarece orice element $\varphi(x) \in K$ va aparţine şi lui S; reciproca nu este adevărată, în general. Spaţiul S s-a obţinut printr-o lărgire a spaţiului K, prin precizarea comportării la infinit a funcţiilor $\varphi(x)$, mai puţin restrictivă decît în cazul spaţiului K; tocmai în aceasta constă diferenţa esenţială dintre cele două spaţii.

Din definiţia convergenţei în spaţiul S rezultă că aceasta este mai slabă decît convergenţa definită în spaţiul K, deoarece din convergenţa în K rezultă convergenţa în S. Astfel, dacă φ_k, $\varphi \in K$ şi $\varphi_k \to \varphi$ în K, aceasta are loc şi în S; mai mult, spaţiul K se bucură de proprietatea că este dens în S, deoarece pentru orice $\varphi \in S$ există un şir $\varphi_k \in K$ astfel încît $\varphi_k \to \varphi$.

Scanned with OKEN Scanner

Funcţia (fig. 1.6)

$$\varphi(x) = e^{-x^2}, \quad x \in R, \tag{1.1.22}$$

aparţine spaţiului fundamental S, după cum se poate verifica cu uşurinţă. În schimb funcţiile (fig. 1.7, *a*, *b*)

$$\varphi_1(x) = e^x, \quad \varphi_2(x) = e^{-|x|}, \quad x \in R, \tag{1.1.23}$$

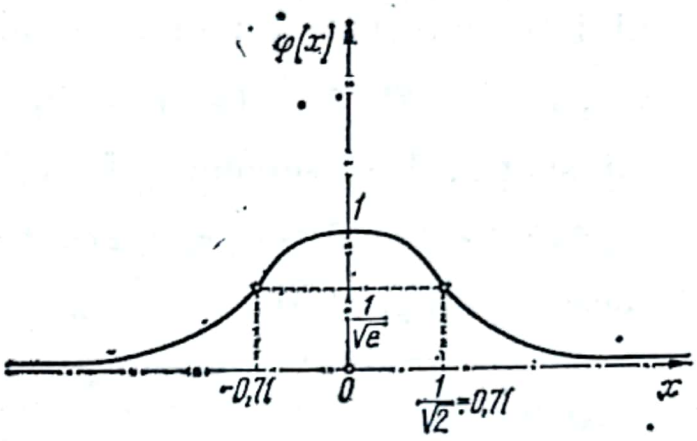


Fig. 1.6.

nu aparţin spaţiului S; într-adevăr, funcţia $\varphi_1(x)$ nu tinde la zero pentru $x \to \infty$, iar funcţia $\varphi_2(x)$ nu este derivabilă în origine.

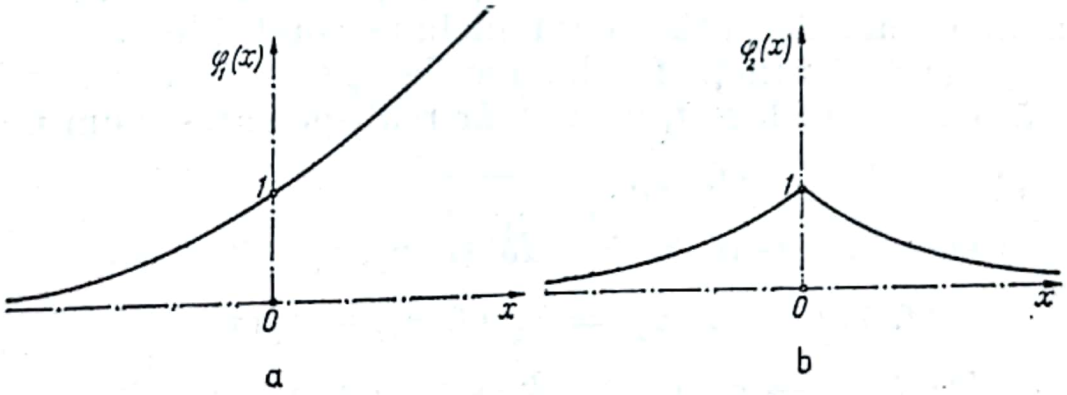


Fig. 1.7.

Observăm că, dacă $a(x) \in C^\infty$ şi $\varphi(x) \in S$, funcţia $\psi(x) = a(x)\,\varphi(x)$ nu aparţine totdeauna spaţiului S; de exemplu, dacă $a(x) = e^{x^2}$, funcţia $a(x)\ e^{-x^2} \notin S$. Se poate arăta că, dacă funcţia $a(x) \in C^\infty$ împreună cu derivatele ei de orice ordin nu creşte pentru $x \to \infty$ mai repede

decît un polinom, funcţia $a(x)\,\varphi(x) \in S$; de exemplu, de această proprietate se bucură funcţiile $\sin x$, $\cos x$, $P(x)$ (polinom în x).

În mod analog, funcţia

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = e^{-|x|^2} = e^{-(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)}, \quad x \in R^n, \tag{1.1.24}$$

aparţine spaţiului fundamental S; în particular, funcţia

$$\varphi(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}, \quad (x, y) \in R^2,$$

aparţine acestui spaţiu. De asemenea, funcţia

$$\varphi(x, y, z) = x^m y^n z^p e^{-(x^2 + y^2 + z^2)} \; (x, y, z) \in R^3, \tag{1.1.25}$$

se bucură de aceeaşi proprietate.

1.1.3. *Spaţiul distribuţiilor*

1.1.3.1. Noţiunea de distribuţie. Spaţiul distribuţiilor

Definiţia 1.1.3. Numim *distribuţie* o funcţională liniară şi continuă, definită pe un spaţiu fundamental.

Vom nota cu Φ (de exemplu, K^m, K sau S) un spaţiu fundamental; definiţia dată include condiţiile:

a) Fiecărei funcţii fundamentale $\varphi \in \Phi$ îi corespunde, după o anumită lege f, un număr real, pe care-l vom nota (f, φ), adică $\varphi \xrightarrow{f} (f, \varphi)$.

b) Oricare ar fi $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ şi $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$ avem

$$(f, \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2) = \lambda_1 (f, \varphi_1) + \lambda_2 (f, \varphi_2).$$

c) Dacă $\varphi_k \to \varphi$ pentru $k \to \infty$, cu $\varphi_k, \varphi \in \Phi$, atunci

$$\lim_{k \to \infty} (f, \varphi_k) = (f, \varphi).$$

Prima dintre aceste condiţii exprimă faptul că funcţionala este *reală*, a doua condiţie corespunde *liniarităţii* acestei funcţionale, iar a treia condiţie implică faptul că funcţionala este *continuă*. Vom nota funcţionala f cu $f(x)$, pentru a pune în evidenţă variabila care intervine.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece funcţionala definită prin condiţiile a) — c) este reală, avem o *distribuţie reală*. Evident, putem introduce şi *distribuţii complexe*; în acest scop este suficient ca în locul unui spaţiu fundamental real să introducem un spaţiu fundamental complex, definiţia 1.1.3 rămînînd valabilă. Numărul (f, φ), corespunzător unei funcţii fundamentale complexe φ, va fi real sau complex. Vom folosi, în cuprinsul lucrării, numai distribuţii reale; în cazurile în care vor apărea distribuţii complexe vom face o menţiune specială.

Totalitatea distribuţiilor definite pe spaţiul fundamental Φ formează spaţiul distribuţiilor Φ'; vom folosi astfel spaţiile $(K^m)'$, K' şi S'. În raport cu spaţiul fundamentul considerat, apar diferite tipuri de distribuţii. Astfel, distribuţiile definite pe spaţiul K^m se numesc *distribuţii de ordin finit* $\leqslant m$; distribuţiile definite pe spaţiul K^0 (cazul $m = 0$) se numesc *măsuri*. Distribuţiile definite pe spaţiul K se numesc *distribuţii de ordin infinit*, iar distribuţiile definite pe spaţiul S se numesc *distribuţii temperate*.

Deoarece convergenţa definită în spaţiul K este mai puternică decît convergenţa definită în spaţiul S, rezultă că mulţimea funcţionalelor definite pe spaţiul K cuprinde mulţimea funcţionalelor definite pe spaţiul S; prin urmare, are loc relaţia

$$S' \subset K'. \tag{1.1.26}$$

Deoarece spaţiul fundamental K este dens în S, rezultă că distribuţiile temperate se pot obţine prin *prelungirea* unor distribuţii definite pe spaţiul fundamental K. Funcţiile integrabile, funcţiile mărginite şi, în general, funcţiile local integrabile, care satisfac relaţia

$$|f(x)| < A\,|x|^k \text{ pentru } |x| \to \infty,\ A, k = \text{const}, \tag{1.1.27}$$

definesc distribuţii temperate; acestea se pot considera prelungiri ale funcţionalelor corespunzătoare din K', Această proprietate va fi utilizată în cazul transformatelor Fourier. De asemenea, distribuţiile cu suport mărginit reprezintă distribuţii temperate; ele pot fi prelungite din K' în S'.

Scanned with OKEN Scanner

Vom defini produsul unei distribuţii cu un număr real prin relaţia

$$(\lambda f, \varphi) = \lambda(f, \varphi), \quad \varphi \in \Phi, \ f \in \Phi', \ \lambda \in R, \quad (1.1.28)$$

şi suma a două distribuţii sub forma

$$(f + g, \varphi) = (f, \varphi) + (g, \varphi), \quad \varphi \in \Phi, f, g \in \Phi'; \quad (1.1.28')$$

prin urmare, dacă $\lambda, \mu \in R$, $\varphi \in \Phi$, $f, g \in \Phi'$. vom avea

$$(\lambda f + \mu g, \varphi) = \lambda(f, \varphi) + \mu(g, \varphi), \quad (1.1.29)$$

aşa încît mulţimea Φ' a distribuţiilor formează un spaţiu liniar.

În acest fel, funcţionala $\lambda f + \mu g$ este liniară şi continuă; continuitatea ei rezultă imediat, deoarece, dacă $\varphi_k \to \varphi$ în Φ pentru $k \to \infty$, atunci

$$(\lambda f + \mu g, \varphi_k) \Rightarrow \lambda(f, \varphi_k) + \mu(g, \varphi_k) \to$$
$$\to \lambda(f, \varphi) + \mu(g, \varphi) = (\lambda f + \mu g, \varphi), \quad k \to \infty.$$

Vom introduce acum o convergenţă în spaţiul distribuţiilor Φ'. Fie φ o funcţie fundamentală aparţinînd spaţiului Φ, iar f şi f_k o distribuţie, respectiv un şir de distribuţii, aparţinînd spaţiului Φ'; spunem că şirul de distribuţii $f_k \in \Phi'$ *converge* către distribuţia $f \in \Phi'$ dacă

$$\lim_{k \to \infty} (f_k, \varphi) = (f, \varphi) \quad (1.1.30)$$

şi

$$\lim_{k \to \infty} f_k = f. \quad (1.1.30')$$

Convergenţa introdusă în Φ' este o *convergenţă slabă*.

În felul acesta, prin introducerea produsului unei distribuţii cu un număr real, a sumei a două distribuţii şi a unei convergenţe se formează *spaţiul distribuţiilor*. Se poate arăta că spaţiul distribuţiilor este un *spaţiu complet*; într-adevăr, dacă şirul de distribuţii f_k este astfel încît, pentru orice $\varphi \in \Phi$, şirul numeric (f_k, φ) are o limită,

Scanned with OKEN Scanner

atunci există o singură distribuție $f \in \Phi'$ pentru care se obține relația (1.1.30).

Fie $a(x)$ o funcție de clasa C^∞ iar $f(x)$ o distribuție aparținînd spațiului Φ'; produsul $a(x)f(x)$ va fi o distribuție precizată de relația

$$(af, \varphi) = (f, a\varphi), \quad \varphi \in \Phi. \tag{1.1.31}$$

Condiția ca funcția $a(x)$ să fie indefinit derivabilă este suficientă pentru existența produsului af în cazul spațiilor fundamentale K^m și K; în cazul spațiului fundamental S am văzut că trebuie îndeplinită o condiție suplimentară (funcția $a(x) \in C^\infty$ nu trebuie să crească mai repede decît un polinom în x pentru $x \to \infty$). În cazul spațiului fundamental K_*^m este suficient ca funcția $a(x)$ să fie de clasa C^m pentru ca produsul $a(x)f(x)$ să aibă sens.

Produsul dintre o distribuție complexă f și o funcție complexă a se definește prin relația

$$(af, \varphi) = (f, \bar{a}\varphi), \tag{1.1.32}$$

unde $\bar{a}$ reprezintă conjugata funcției complexe a și se admite că $\bar{a}\varphi \in \Phi$. În particular, dacă $a = \lambda = \alpha + i\beta$ este un număr complex, atunci $\bar{a} = \overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ și se poate scrie

$$(\lambda f, \varphi) = (f, \overline{\lambda}\varphi) = \overline{\lambda}\,(f, \varphi).$$

Mai observăm că unei distribuții complexe f îi putem asocia distribuția conjugată $\bar{f}$, prin relația

$$(\bar{f}, \varphi) = (\overline{f, \bar{\varphi}}). \tag{1.1.33}$$

1.1.4. *Exemple de distribuții*

1.1.4.1. Exemple de distribuții

Pentru a face o alegere, fie $\Phi = K$; vom defini funcționala f care face ca fiecărei funcții $\varphi \in K$ să-i corespundă numărul

$$(f, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) = \varphi(0) + \varphi(1) + \varphi(2) + \dots \tag{1.1.34}$$

Scanned with OKEN Scanner

Această sumă este finită, deoarece $\varphi(x)$ este o funcție cu suport compact. Funcționala astfel considerată este o distribuție, deoarece este liniară și continuă, ceea ce se poate verifica cu ușurință. Evident, în locul spațiului fundamental K se poate considera spațiul fundamental K^m, obținînd astfel o distribuție de ordin finit $\leqslant m$ pe acest spațiu.

Dacă considerăm funcționala (1.1.34) definită pe spațiul S, funcția $\varphi(x)$ nu are suport compact, iar membrul al doilea din această formulă reprezintă o serie numerică. Deoarece $\varphi(x) \in S$, înseamnă că $|\varphi(x)| < \frac{A}{|x|^{m+2}}$, $A > 0$, $m > 0$, seria $\sum_{n=0}^{\infty} |\varphi(n)|$ fiind convergentă, deci și seria $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n)$ este convergentă, funcționala (1.1.34) avînd sens și pe spațiul S. Funcționala (1.1.34) astfel definită este liniară, continuitatea ei rezultînd din faptul că convergența în K este mai tare decît convergența în S; prin urmare, această funcțională reprezintă o distribuție pe spațiul S.

1.1.4.2. Distribuția lui Dirac

Distribuția $\delta(x)$ a lui Dirac poate fi definită pe oricare dintre spațiile K^m, K sau S, prin relația

$$(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0), \quad x \in R^n; \tag{1.1.35}$$

se poate verifica cu ușurință că această funcțională este liniară și continuă. Observăm că această distribuție este concentrată în origine.

În baza relației (1.1.35), putem scrie distribuția lui Dirac concentrată în punctul $x^0 \in R^n$ (*distribuția translatată*); ea se va nota prin $\delta(x - x^0)$ și va fi definită de relația

$$(\delta(x-x^0), \varphi(x)) = \varphi(x^0), \quad x, x^0 \in R^n. \tag{1.1.35'}$$

Observăm că distribuția lui Dirac reprezintă o măsură, deoarece pentru definiția acestei funcționale este suficient să considerăm spațiul K^0 $(m = 0)$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă distribuţia $\delta(x)$ este definită pe K^0 şi dacă funcţia $a(x) \in C^0$, atunci produsul $a(x)\,\delta(x)$ are sens; în baza formulei (1.1.31), putem scrie

$$(a(x)\,\delta(x),\ \varphi(x)) = (\delta(x),\ a(x)\varphi(x)) = a(0)\varphi(0),\quad x \in R^n. \tag{1.1.36}$$

Menţionăm că funcţionala f, definită pe K^m, K sau S prin relaţia

$$(f,\ \varphi) = |\varphi(0)| \tag{1.1.37}$$

nu reprezintă o distribuţie, deşi este continuă, deoarece nu este liniară; într-adevăr, în general, modulul sumei a două numere nu este egal cu suma modulelor celor două numere.

1.1.4.3. Distribuţii regulate. Distribuţii singulare

Spunem că o funcţie $f(x)$, $x \in R^n$, este *absolut integrabilă* pe un domeniu finit $D_n \subset R^n$ dacă există integrala

$$\int_{D_n} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty; \tag{1.1.38}$$

dacă această funcţie este absolut integrabilă pe orice domeniu finit din R^n, spunem că ea este o funcţie *local integrabilă*. Menţionăm faptul că o funcţie absolut integrabilă este şi *integrabilă*, adică

$$\int_{D_n} f(x)\,\mathrm{d}x < \infty. \tag{1.1.39}$$

Funcţiile local integrabile generează o clasă importantă de distribuţii. Astfel, dacă $f(x)$ este o funcţie local integrabilă, iar $\varphi(x) \in K$, vom defini o funcţională, prin relaţia

$$(f,\ \varphi) = \int_{R^n} f\varphi\,\mathrm{d}x = \int_{D_n} f\varphi\,\mathrm{d}x,\quad x \in R^n, \tag{1.1.40}$$

unde D_n este suportul funcţiei fundamentale $\varphi(x)$. Observăm că dacă $f_k(x)$ formează un şir de funcţii local inte-

grabile în R^n, convergent uniform către funcţia $f(x)$ pe orice compact, atunci

$$\lim (f_k, \varphi) = (f, \varphi); \qquad (1.1.41)$$

prin urmare, această funcţională defineşte o distribuţie. Dacă $f(x)$ este o funcţie cu valori complexe local integrabilă, relaţia (1.1.40) se va scrie

$$(f, \varphi) = \int_{D_n} \bar{f}\varphi \, dx. \qquad (1.1.40')$$

Distribuţiile generate de funcţiile local integrabile $f(x)$ se numesc *distribuţii regulate sau de tip funcţie*; ele se vor nota tot prin $f(x)$, ca şi funcţia generatoare.

Dacă $\varphi(x) \in S(R^n)$ iar $f(x)$ este o funcţie integrabilă pe R^n, expresia

$$(f, \varphi) = \int_{R^n} f\varphi \, dx, \quad x \in R^n, \qquad (1.1.42)$$

defineşte o *distribuţie regulată temperată*.

Dacă $f(x)$ este o funcţie mărginită, adică $|f(x)| \leqslant A$ pentru orice $x \in R^n$, atunci

$$|(f, \varphi)| \leqslant A \int_{R^n} |\varphi(x)| \, dx; \qquad (1.1.43)$$

deoarece integrala din (1.1.43) există, rezultă că şi în acest caz funcţia mărginită $f(x)$ defineşte pe spaţiul S o distribuţie regulată temperată.

În general, dacă $f(x)$ este o funcţie local integrabilă şi astfel încît $|f(x)| \leqslant A|x|^k$, $k > 0$, pentru $|x| \to \infty$ şi dacă $\varphi(x) \in S$ (deci satisface relaţia $|\varphi(x)| \leqslant B\,|x|^{-(k+2)}$, $k > 0$), vom avea $|f(x)\,\varphi(x)| \leqslant AB|x|^{-2}$; rezultă că integrala $\int_{R^n} f(x)\,\varphi(x)\,dx$ există iar funcţia $f(x)$ defineşte o distribuţie regulată temperată pe spaţiul fundamental S.

Deoarece spaţiul K este dens în S, rezultă că orice distribuţie temperată poate fi considerată ca o *prelungire unică* a distribuţiei corespunzătoare definite pe spaţiul K.

Scanned with OKEN Scanner

Distribuţiile care nu sînt de tip funcţie se numesc *distribuţii singulare*. Un exemplu de distribuţie singulară este distribuţia lui Dirac $\delta(x)$, deoarece nu există nici o funcţie local integrabilă $\delta(x)$ astfel încît

$$(\delta(x),\ \varphi(x)) = \int_{R^n} \delta(x)\ \varphi(x)\ \mathrm{d}x = \varphi(0)\,; \quad (1.1.44)$$

o asemenea relaţie nu poate fi scrisă decît în mod simbolic.

1.1.5. *Transformări liniare de variabile*

1.1.5.1. Transformări liniare

Fie $f(x)$, $x \in R^n$, o funcţie local integrabilă definită pe spaţiul euclidian n-dimensional, iar

$$x = ay + b, \quad (1.1.45)$$

cu matricea

$$a = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (1.1.46)$$

a^{-1} fiind matricea inversă, o transformare liniară nedegenerată (pentru care $\det a \neq 0$); putem scrie dezvoltat

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}\,y_1 + a_{12}\,y_2 + \dots + a_{1n}\,y_n + b_1, \\ x_2 &= a_{21}\,y_1 + a_{22}\,y_2 + \dots + a_{2n}\,y_n + b_2, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= a_{n1}\,y_1 + a_{n2}\,y_2 + \dots + a_{nn}\,y_n + b_n. \end{aligned}$$

Dacă $\varphi(x) \in K(R^n)$, putem scrie

$$(f(ay + b),\ \varphi(y)) = \int_{R^n} f(ay + b)\ \varphi(y)\ \mathrm{d}y\,;$$

deoarece $y = a^{-1}(x - b)$ iar $dy = |\det a|^{-1} dx$, rezultă relaţia

$$(f(ay + b),\ \varphi(y)) = \frac{1}{|\det a|}(f(x),\ \varphi[a^{-1}(x - b)]). \quad (1.1.47)$$

Această egalitate stabilită pentru distribuţii de tip funcţie va fi admisă pentru definirea distribuţiei oarecare $f(ay+b)$.

1.1.5.2. Translaţia distribuţiilor

Să considerăm, în particular, *translaţia distribuţiilor*. Dacă $f(y)$ este o distribuţie, atunci $f(y-y^0)$ va fi distribuţia translatată, cu $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ şi $y^0 = (y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$; vom avea

$$x = y - y^0 \quad (1.1.48)$$

sau dezvoltat

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 - y_1^0, \\ x_2 &= y_2 - y_2^0 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= y_n - y_n^0. \end{aligned}$$

Matricea a este matricea unitate

$$a = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 \ldots 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \ldots 1 \end{pmatrix}, \quad (1.1.49)$$

$\det a = 1$, iar $a^{-1} = a$; va rezulta

$$(f(y - y^0),\ \varphi(y)) = (f(x),\ \varphi(x + y^0)). \quad (1.1.50)$$

Observînd că putem schimba notaţia pentru variabila independentă, rezultă

$$(f(x - x^0),\ \varphi(x)) = (f(x),\ \varphi(x + x^0)), \quad x, x^0 \in R^n.$$

Scanned with OKEN Scanner

În particular, vom putea scrie

$$(\delta(x - x^0),\ \varphi(x)) = (\delta(x),\ \varphi(x + x^0)) = \varphi(x^0), \quad x, x^0 \in R^n. \tag{1.1.51}$$

1.1.5.3. Omotetia distribuțiilor

Transformarea liniară prin *omotetie* (*dilatare* sau *contracție*) este definită prin

$$x = ay, \tag{1.1.52}$$

matricea a și matricea inversă a^{-1} fiind de forma

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad a^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}, \tag{1.1.53}$$

iar $\det a = a_{11}\ a_{22} \dots a_{nn}$; putem scrie dezvoltat

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}\, y_1, \\ x_2 &= a_{22}\, y_2, \\ &\dots\dots \\ x_n &= a_{nn}\, y_n. \end{aligned}$$

În acest caz, rezultă

$$(f(ay),\ \varphi(y)) = \frac{1}{|a_{11}a_{22}\ \dots a_{nn}|}\left(f(x),\ \varphi\left(\frac{x}{a}\right)\right); \tag{1.1.54}$$

schimbînd variabilele independente, mai putem scrie

$$(f(a_{11}\, x_1,\ a_{22}\, x_2, \dots,\ a_{nn}\, x_n),\ \varphi(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)) =$$

$$= \frac{1}{|a_{11}\, a_{22} \dots a_{nn}|}\left(f(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n),\ \varphi\left(\frac{x_1}{a_{11}}, \frac{x_2}{a_{22}}, \dots, \frac{x_n}{a_{nn}}\right)\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = \alpha$, găsim

$$(f(\alpha x),\ \varphi(x)) = \frac{1}{|\alpha|^n}\left(f(x),\ \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right),\quad x \in R^n,\ \alpha \in R. \tag{1.1.55}$$

Pentru distribuţia lui Dirac putem scrie

$$(\delta(\alpha x),\ \varphi(x)) = \frac{1}{|\alpha|^n}\left(\delta(x),\ \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) = \frac{\varphi(0)}{|\alpha|^n},\quad x \in R^n,\ \alpha \in R. \tag{1.1.56}$$

Dacă $\alpha = -1$, obţinem *simetria distribuţiilor*, relaţia respectivă fiind de forma

$$(f(-x),\ \varphi(x)) = (f(x),\ \varphi(-x)),\quad x \in R^n; \tag{1.1.57}$$

în particular,

$$(\delta(-x),\ \varphi(x)) = (\delta(x),\ \varphi(-x)) = \varphi(0),\ x \in R^n. \tag{1.1.58}$$

1.1.6. *Egalitatea distribuţiilor*

1.1.6.1. Egalitatea a două distribuţii

Dacă $f(x)$ şi $g(x)$ sînt două funcţii continue pe un interval $[a,b] \subset R$, egalitatea lor pe acest interval are loc dacă funcţiile respective au aceeaşi valoare în fiecare punct al intervalului considerat; evident, această egalitate în sens obişnuit a celor două funcţii continue este o egalitate punctuală, adică locală.

Putem introduce egalitatea celor două funcţii considerate, într-un sens mai larg, impunînd, de exemplu, condiţia ca ariile definite de ele pe intervalul $[a, b]$ să fie egale:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx,\quad x \in R; \tag{1.1.59}$$

egalitatea în sensul relaţiei (1.1.59) poate fi extinsă la o clasă mai largă de funcţii decît funcţiile continue.

Scanned with OKEN Scanner

Definiția 1.1.4. Spunem că o *funcție* $f(x)$ este *nulă a.p.t.* (aproape peste tot) *pe o mulțime* A, dacă mulțimea punctelor x pentru care $f(x) \neq 0$, $x \in A$, este de măsură nulă (poate fi acoperită de o mulțime numărabilă de intervale a căror sumă este oricît de mică).

Observăm că mulțimile de măsură nulă se mai numesc și *mulțimi neglijabile.*

Definiția 1.1.5. Spunem că *două funcții* $f(x)$ *și* $g(x)$ sînt *egale a.p.t. pe o mulțime* A, dacă mulțimea punctelor $x \in A$ pentru care $f(x) \neq g(x)$ este o mulțime de măsură nulă.

În acest caz, putem scrie

$$f(x) = g(x) \text{ a.p.t., } x \in A. \tag{1.1.60}$$

De aici rezultă că dacă funcțiile integrabile $f(x)$ și $g(x)$, definite pe mulțimea $A = [a, b]$, sînt egale a.p.t., atunci are loc relația (1.1.59); aceasta constitue o generalizare a egalității punctuale a două funcții.

Fie $f(x)$ și $g(x)$, $x \in R^n$ funcții local integrabile și egale a.p.t.; dacă $\varphi(x) \in K$, avem

$$\int_{R^n} f(x)\ \varphi(x)\, dx = \int_{R^n} g(x)\ \varphi(x)\ dx, \tag{1.1.61}$$

deci

$$(f, \varphi) = (g, \varphi) \tag{1.1.61'}$$

sau

$$(f - g, \varphi) = 0. \tag{1.1.61''}$$

Definiția 1.1.6. Spunem că *distribuțiile* $f(x)$ *și* $g(x)$ *sînt egale*:

$$f = g, \tag{1.1.62}$$

dacă pentru orice funcție fundamentală $\varphi(x)$ avem o relație de forma (1.1.61').

Definiția 1.1.7. *O distribuție* $f(x)$ *este egală cu zero*:

$$f = 0 \tag{1.1.63}$$

Scanned with OKEN Scanner

dacă pentru orice funcţie fundamentală $\varphi(x)$ avem

$$(f(x),\ \varphi(x)) = 0. \tag{1.1.63'}$$

De exemplu, funcţia

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } x \neq 1,2,\ x \in R, \\ 1 \text{ pentru } x = 1, \\ 2 \text{ pentru } x = 2 \end{cases} \tag{1.1.64}$$

generează o distribuţie egală cu zero.

De asemenea, vom considera *funcţia lui Dirichlet*

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } x \text{ iraţional}, \\ 1 \text{ pentru } x \text{ raţional}, \end{cases} \tag{1.1.65}$$

definită pentru $x \in R$, precum şi funcţia

$$g(x) = 0, \quad x \in R; \tag{1.1.66}$$

observăm că funcţia $f(x)$ este discontinuă în fiecare punct, în timp ce funcţia $g(x)$ este continuă. Funcţia $f(x)$ nu este local integrabilă din punctul de vedere al integralei Riemann, dar este local integrabilă în sensul integralei Lebesgue; astfel, aceste două funcţii sînt egale a.p.t., fiind local integrabile în sensul lui Lebesgue, iar mulţimea punctelor în care $f(x) \neq g(x)$ este o mulţime de măsură nulă, formată din punctele de abscisă raţională. Putem deci scrie

$$(\mathscr{L})\int_R f(x)\ \varphi(x)\,dx = (\mathscr{L})\int_R g(x)\ \varphi(x)\ dx = 0,$$

avînd îndeplinite relaţii de forma (1.1.61') şi (1.1.63') pentru orice funcţie fundamentală $\varphi(x)$; distribuţiile generate de funcţiile $f(x)$ şi $g(x)$ sînt astfel egale (distribuţia generată de funcţia lui Dirichlet este egală cu zero).

Introducînd şi funcţia

$$h(x) = 1,\ x \in R, \tag{1.1.67}$$

constatăm că aceasta diferă de funcţia $f(x)$ a lui Dirichlet pe mulţimea numerelor iraţionale; deoarece această mul-

Scanned with OKEN Scanner

țime nu formează pe nici un compact o mulțime de măsură nulă, rezultă că cele două funcții nu sînt egale a.p.t., așa încît

$$(\mathscr{L})\int_R f(x)\,\varphi(x)\,dx=0,\quad (\mathscr{L})\int_R h(x)\,\varphi(x)\,dx=(\mathscr{R})\int_R \varphi(x)\,dx,$$

cele două distribuții generate nefiind egale.

1.1.6.2. Distribuția lui Heaviside

Fie funcțiile

$$\theta(x)=\begin{cases}0 \text{ pentru } x<0,\\ 1 \text{ pentru } x\geqslant 0,\end{cases} \tag{1.1.68}$$

$$\theta_1(x)=\begin{cases}0 \text{ pentru } x<0,\\ 2 \text{ pentru } x=0,\\ 1 \text{ pentru } x>0;\end{cases} \tag{1.1.68'}$$

aceste funcții sînt local integrabile, în sensul integralei Riemann, diferind numai în punctul $x=0$. În consecință, distribuțiile generate de ele sînt egale

$$\theta(x)=\theta_1(x) \tag{1.1.69}$$

și putem scrie

$$(\theta(x),\,\varphi(x))=\int_0^\infty \varphi(x)\,dx.$$

Distribuția $\theta(x)$ este o distribuție regulată, fiind numită *distribuția lui Heaviside.*

Funcția lui Heaviside

$$\theta(x_1, x_2,\ldots, x_n)=\begin{cases}1 \text{ pentru } x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ \ldots,\ x_n\geqslant 0,\\ 0 \text{ în rest,}\end{cases} \tag{1.1.70}$$

definită pe R^n, generează o distribuție regulată (distribuția lui Heaviside pe R^n), prin relația

$$(\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n))=$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty \varphi(x_1, x_2,\ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n.$$

Scanned with OKEN Scanner

1.1.6.3. Proprietăţi ale distribuţiei lui Dirac

Folosind relaţia de definiţie a egalităţii a două distribuţii, se pot obţine unele relaţii interesante privind distribuţiile. Astfel, cu ajutorul formulelor (1.1.31) şi (1.1.51) putem generaliza relaţia (1.1.36) sub forma

$$(a(x)\ \delta(x - x^0),\ \varphi(x)) = a(x^0)\ \varphi(x^0),\quad a(x) \in C^0,\quad x, x^0 \in R^n; \tag{1.1.71}$$

ţinînd seama de relaţia (1.1.35′) şi folosind modul de definire a egalităţii a două distribuţii, rezultă

$$a(x)\ \delta(x - x^0) = a(x^0)\ \delta(x - x^0),\ a(x) \in C^0,\quad x, x^0 \in R^n. \tag{1.1.72}$$

În particular

$$x^n\ \delta(x) = 0,\quad n \in N_0,\quad x \in R. \tag{1.1.73}$$

În mod analog, putem scrie

$$a(x, y)\ \delta(x, y) = a(0, 0)\ \delta(x, y),\ a(x, y) \in C^0, \tag{1.1.74}$$

şi, în particular,

$$x\ \delta(x, y) = 0. \tag{1.1.75}$$

Ţinînd seama de (1.1.35), relaţia (1.1.58) ne conduce la

$$\delta(-x) = \delta(x),\quad x \in R^n, \tag{1.1.76}$$

distribuţia lui Dirac fiind astfel o *distribuţie pară*.

În mod analog, plecînd de la (1.1.56), găsim

$$\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|}\,\delta(x),\quad x \in R\,; \tag{1.1.77}$$

în spaţiul R^n rezultă, de asemenea,

$$\delta(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_n x_n) = \frac{1}{|\alpha_1||\alpha_2|\ldots|\alpha_n|}\,\delta(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Scanned with OKEN Scanner

Mai putem scrie

$$\delta(\alpha x + \beta) = \frac{1}{|\alpha|^n}\,\delta\left(x + \frac{\beta}{\alpha}\right),\ x \in R^n. \quad (1.1.78)$$

1.1.6.4. Distribuţia $\mathrm{Vp}\,\frac{1}{x}$

Fie funcţia (fig. 1.8)

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ pentru } x \neq 0; \quad (1.1.79)$$

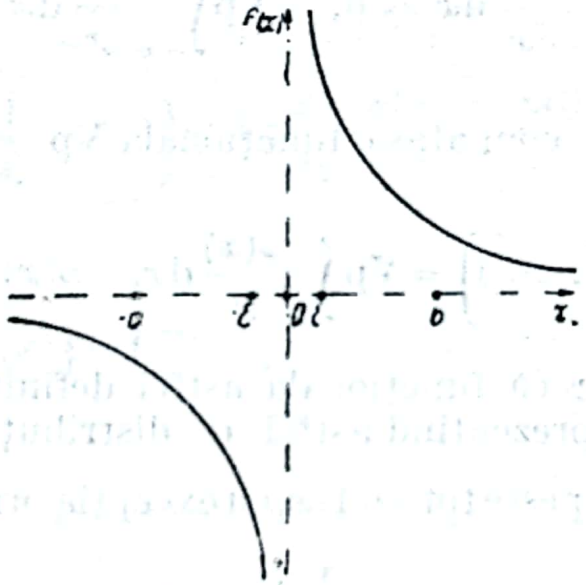


Fig. 1.8.

această funcţie nu este local integrabilă, deoarece nu este integrabilă în nici o vecinătate a originii. Excluzînd o vecinătate a originii, se obţine o funcţie local integrabilă. Graficul funcţiei este alcătuit din două ramuri de hiperbolă echilateră, ale cărei asimptote sînt chiar axele de coordonate.

Pentru a putea asocia o funcţională acestei funcţii, introducem noţiunea de *valoare principală în sensul lui Cauchy* a integralei divergente din funcţia dată. Evident $\int_{-a}^{b} \frac{1}{x}\,dx,\ a, b > 0,$ nu există. Prin definiţie, valoarea

principală a acestei integrale, notată cu Vp, este dată de

$$\mathrm{Vp}\int_{-a}^{b}\frac{1}{x}\,dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{-a}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}\,dx+\int_{\varepsilon}^{b}\frac{1}{x}\,dx\right);\quad(1.1.80)$$

efectuînd calculul în membrul drept, obținem

$$\mathrm{Vp}\int_{-a}^{b}\frac{1}{x}\,dx=\ln\frac{b}{a},\quad a,\,b>0.$$

În particular, rezultă

$$\mathrm{Vp}\int_{-a}^{a}\frac{1}{x}\,dx=0,\quad \mathrm{Vp}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x}\,dx=0.\quad(1.1.81)$$

Funcției $1/x$ îi vom atașa funcționala $\mathrm{Vp}\,\frac{1}{x}$ prin relația

$$\left(\mathrm{Vp}\frac{1}{x},\,\varphi(x)\right)=\mathrm{Vp}\int_{R}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx,\quad\varphi(x)\in K;\quad(1.1.82)$$

se verifică ușor că funcționala astfel definită este liniară și continuă, reprezentînd astfel o distribuție. Distribuția $\mathrm{Vp}\frac{1}{x}$ coincide peste tot cu $1/x$, cu excepția originii; de aceea spunem că distribuția $\mathrm{Vp}\frac{1}{x}$ constituie o *regularizare* a funcției $1/x$.

Observăm că pentru $\varphi(x)\in K$ putem scrie

$$\left(x\,\mathrm{Vp}\frac{1}{x},\,\varphi(x)\right)=\left(\mathrm{Vp}\frac{1}{x},\,x\varphi(x)\right)=\mathrm{Vp}\int_{R}\varphi(x)\,dx=$$

$$=\int_{R}\varphi(x)\,dx=(1,\,\varphi(x)),$$

de unde rezultă

$$x\,\mathrm{Vp}\frac{1}{x}=1;\quad(1.1.83)$$

Scanned with OKEN Scanner

aceasta ne asigură că am efectuat o bună regularizare a funcţiei $1/x$, relaţia (1.1.83) arătîndu-ne că se menţine proprietatea esenţială a acestei funcţii.

1.1.6.5. Alte distribuţii

Introducem funcţia

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \text{ pentru } x \neq 0, \tag{1.1.84}$$

căreia îi facem să-i corespundă distribuţia $\mathrm{Vp}\frac{1}{x^2}$, prin relaţia

$$\left(\mathrm{Vp}\,\frac{1}{x^2}, \varphi(x)\right) = \mathrm{Vp}\int_R \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2}\,dx;$$

observînd că

$$\left(x^2\,\mathrm{Vp}\frac{1}{x^2}, \varphi(x)\right) = \left(\mathrm{Vp}\,\frac{1}{x^2},\ x^2\varphi(x)\right) = \mathrm{Vp}\int_R \varphi(x)\,dx =$$

$$= \int_R \varphi(x)\,dx = (1,\ \varphi(x)),$$

are loc relaţia

$$x^2\,\mathrm{Vp}\,\frac{1}{x^2} = 1. \tag{1.1.85}$$

Fiind dată funcţia

$$f(x) = \frac{1}{|x|} \text{ pentru } x \neq 0,\ x \in R, \tag{1.1.86}$$

introducem distribuţia $\mathscr{P}\,\frac{1}{|x|}$ definită prin relaţia

$$\left(\mathscr{P}\frac{1}{|x|}, \varphi(x)\right) = \int_{|x|<1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|}\,dx + \int_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{|x|}\,dx;$$

Scanned with OKEN Scanner

putem extinde această definiţie la cazul în care $x \in R^n$. De exemplu, dacă notăm

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{1.1.87}$$

definim distribuţia $\mathscr{P}\,\frac{1}{r}$ prin relaţia

$$\left(\mathscr{P}\,\frac{1}{r},\ \varphi(x,y)\right) = \iint_{r<1} \frac{\varphi(x,y) - \varphi(0,0)}{r}\,dx\,dy + \iint_{r>1} \frac{\varphi(x,y)}{r}\,dx\,dy\,; \tag{1.1.88}$$

această distribuţie este o regularizare a funcţiei, $1/r$ care nu este local integrabilă în vecinătatea originii.

În mod analog putem introduce distribuţia $\mathscr{P}\,\frac{1}{x^2+y^2}$.

Observăm că funcţiei (1.1.84) îi putem face să corespundă şi distribuţia $\mathrm{Pf}\,\frac{1}{x^2}$ numită pseudofuncţia $\frac{1}{x^2}$ şi definită prin relaţia

$$\left(\mathrm{Pf}\,\frac{1}{x^2},\ \varphi(x)\right) = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx - 2\,\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}\right]. \tag{1.1.89}$$

În mod analog, distribuţiile $\mathrm{Pf}\,\frac{\theta(x)}{x}$ şi $\mathrm{Pf}\,\frac{\theta(-x)}{x}$ se definesc prin relaţiile

$$\left(\mathrm{Pf}\,\frac{\theta(x)}{x},\ \varphi(x)\right) = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \varphi(0)\ln\varepsilon\right], \tag{1.1.90}$$

$$\left(\mathrm{Pf}\,\frac{\theta(-x)}{x},\ \varphi(x)\right) = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx - \varphi(0)\ln\varepsilon\right]. \tag{1.1.90'}$$

Scanned with OKEN Scanner

Se verifică, cu uşurinţă, relaţiile

$$\mathrm{Vp}\,\frac{1}{x} = \mathrm{Pf}\,\frac{\theta(x)}{x} + \mathrm{Pf}\,\frac{\theta(-x)}{x}, \qquad (1.1.91)$$

$$\mathscr{P}\,\frac{1}{|x|} = \mathrm{Pf}\,\frac{\theta(x)}{x} - \mathrm{Pf}\,\frac{\theta(-x)}{x}. \qquad (1.1.91')$$

Menţionăm că noţiunea de parte finită a unei integrale, ca şi noţiunea de pseudofuncţie au fost introduse de J. Hadamard.

1.1.6.6. Suportul unei distribuţii. Distribuţii concentrate pe o mulţime

Definiţia 1.1.8. Dacă A este o mulţime deschisă, spunem că *distribuţia* f este *nulă pe* A :

$$f(x) = 0, \quad x \in A, \qquad (1.1.92)$$

dacă, pentru orice funcţie fundamentală $\varphi \in K$, avem

$$(f, \varphi) = 0, \quad \mathrm{supp}\ \varphi \subset A.$$

Definiţia 1.1.9. Spunem că *distribuţiile* f *şi* g sînt *egale pe mulţimea deschisă* A, dacă, pentru orice funcţie fundamentală $\varphi \in K$, avem

$$(f, \varphi) = (g, \varphi), \quad \mathrm{supp}\ \varphi \subset A, \qquad (1.1.93)$$

sau

$$(f-g, \varphi) = 0, \quad \mathrm{supp}\ \varphi \subset A\,;$$

vom scrie

$$f(x) = g(x), \quad x \in A.$$

Din însăşi definiţia noţiunii de distribuţie am văzut că nu se poate vorbi de valoarea unei distribuţii într-un punct ; astfel, nu putem spune că o distribuţie $f(x)$ este nulă în punctul x_0. Putem da însă un sens precis noţiunii de distribuţie nulă în vecinătatea unui punct. Fie astfel U o vecinătate oarecare a punctului x_0, iar $\varphi(x) \in K$ o funcţie fundamentală arbitrară, avînd suportul inclus

Scanned with OKEN Scanner

în U; spunem că distribuția $f(x)$ este nulă în vecinătatea punctului x_0 dacă $(f, \varphi) = 0$ pentru orice $\varphi \in K$, supp $\varphi \subset U$. Se poate dovedi că o distribuție $f(x)$ este nulă pe mulțimea deschisă A dacă este nulă în vecinătatea fiecărui punct al acestei mulțimi; aceasta pune în evidență proprietatea locală de care se bucură distribuțiile: dacă două distribuții sînt egale în vecinătatea fiecărui punct, atunci ele sînt egale și global, adică pe o mulțime deschisă dată.

Definiția 1.1.10. Numim *suport al unei distribuții* f complementara reuniunii mulțimilor deschise pe care se anulează această distribuție; suportul distribuției f se va nota supp f.

Din definiție rezultă că suportul unei distribuții este o mulțime închisă. În acest caz, dacă suportul unei distribuții este o mulțime mărginită, spunem că avem o distribuție cu suport compact; aceste distribuții sînt deosebit de importante în aplicații.

Definiția 1.1.11. Spunem că o *distribuție* f este *concentrată pe o mulțime* A dacă suportul distribuției f este conținut în A (supp $f \subset A$).

În particular, suportul unei distribuții generate de o funcție continuă pe porțiuni este format din închiderea punctelor în care funcția este diferită de zero.

Fie distribuția lui Dirac $\delta(x)$; pentru orice $\varphi(x) \in K$ vom putea scrie relația (1.1.35). Observăm însă că pentru orice $\varphi(x) \in K$ al cărui suport nu conține originea putem scrie

$$(\delta(x), \varphi(x)) = 0, \quad 0 \notin \text{supp } \varphi; \qquad (1.1.94)$$

prin urmare, distribuția $\delta(x)$ este nulă în vecinătatea oricărui punct $x \neq 0$, adică

$$\delta(x) = 0 \text{ pentru } x \neq 0. \qquad (1.1.94')$$

Rezultă că suportul distribuției $\delta(x)$ este punctul 0; spunem astfel că distribuția lui Dirac $\delta(x)$ este concentrată în origine. În mod analog, distribuția $\delta(x - x^0)$ are ca suport punctul x^0, fiind concentrată în acest punct.

Scanned with OKEN Scanner

Din definiția egalității a două distribuții pe o mulțime deschisă rezultă, în baza relației (1.1.94′), că distribuția lui Dirac $\delta(x)$ este egală cu distribuția identic nulă pe mulțimea punctelor $x \neq 0$. Distribuția $\delta(x)$ este o distribuție cu suport compact.

În mod analog, distribuția $\mathrm{Vp}\,\frac{1}{x}$ este egală cu $\frac{1}{x}$ pe mulțimea punctelor $x \neq 0$; această distribuție are drept suport mulțimea R a numerelor reale, deci nu reprezintă o distribuție cu suport compact.

Distribuția lui Heaviside are suportul $[0, \infty) = R_+$, adică are suportul mărginit la stînga; deci $\theta(x)$ este o distribuție cu suportul necompact, concentrată pe semidreapta pozitivă R_+.

1.1.6.7. Funcția caracteristică a unui interval

Să considerăm funcția (fig. 1.9)

$$h(x) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } |x| > a, \\ 1 \text{ pentru } |x| \leqslant a, \end{cases} \quad a > 0; \tag{1.1.95}$$

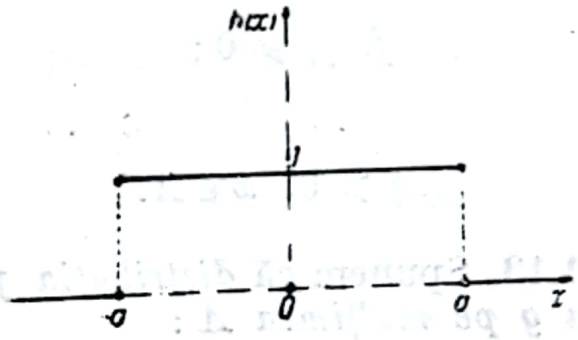


Fig. 1.9.

această funcție se numește *funcția caracteristică* corespunzătoare intervalului $[-a, a]$. În general, funcția

$$g(x) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } x \in A, \\ 0 \text{ pentru } x \notin A \end{cases} \tag{1.1.96}$$

reprezintă funcția caracteristică corespunzătoare mulțimii A.

Funcţia $h(x)$ generează o distribuţie, definită prin relaţia

$$(h(x), \varphi(x)) = \int_R f(x)\ \varphi(x)\, dx = \int_{-a}^{a} \varphi(x)\, dx; \quad (1.1.97)$$

observăm că pentru orice $\varphi(x) \in K$ cu supp $\varphi \cap [-a, a] = \emptyset$ avem $(h, \varphi) = 0$. Prin urmare, suportul distribuţiei $h(x)$ este $[-a, a]$; această distribuţie are suportul compact, fiind concentrată pe $[-a, a]$.

Distribuţia $h(x)$, poate fi exprimată cu ajutorul distribuţiei lui Heaviside sub forma

$$h(x) = \theta(x + a) - \theta(x - a) = \theta(a - |x|), \quad x \in R. \quad (1.1.98)$$

1.1.6.8. Relaţii de inegalitate

Pentru a putea compara distribuţiile, vom introduce noţiunea de distribuţie pozitivă.

Definiţia 1.1.12. Spunem că *distribuţia* f este *pozitivă pe mulţimea* A, dacă pentru orice $\varphi \in K$, $\varphi \geqslant 0$, supp $\varphi \subset A$, avem

$$(f, \varphi) \geqslant 0; \quad (1.1.99)$$

scriem

$$f(x) \geqslant 0, \quad x \in A.$$

Definiţia 1.1.13. Spunem că *distribuţia* f *este mai mare decît distribuţia* g *pe mulţimea* A:

$$f(x) \geqslant g(x), \quad x \in A, \quad (1.1.100)$$

dacă pentru orice $\varphi \in K$, $\varphi \geqslant 0$, supp $\varphi \subset A$, avem

$$(f, \varphi) \geqslant (g, \varphi), \quad (f - g, \varphi) \geqslant 0.$$

Dacă relaţiile de inegalitate au loc pentru orice mulţime A, vom scrie

$$f \geqslant 0 \quad (1.1.101)$$

Scanned with OKEN Scanner

dacă $(f, \varphi) \geqslant 0$ pentru orice $\varphi \in K$, $\varphi \geqslant 0$; în mod analog, vom scrie

$$f \geqslant g \tag{1.1.102}$$

dacă $(f, \varphi) \geqslant (g, \varphi)$ pentru orice $\varphi \in K$, $\varphi \geqslant 0$.

Astfel, dacă $\varphi(x) \geqslant 0$ ($\varphi(x) \in K$), vom avea

$$(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0) \geqslant 0 ; \tag{1.1.103}$$

prin urmare, *distribuția lui Dirac este pozitivă*.

Observăm că putem scrie

$$(\delta(2x), \varphi(x)) = \frac{1}{2}\varphi(0) \geqslant 0,$$

$$(\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0) \geqslant 0 ;$$

rezultă că

$$\delta(x) \geqslant \delta(2x). \tag{1.1.104}$$

Dacă $f(x)$ și $g(x)$ sînt funcții local integrabile și astfel încît $f \geqslant g$. a.p.t., atunci pentru orice $\varphi \geqslant 0$ ($\varphi \in K$) avem

$$(f, \varphi) \geqslant (g, \varphi), \tag{1.1.105}$$

adică

$$\int_R f(x)\varphi(x)\,dx \geqslant \int_R g(x)\varphi(x)\,dx ;$$

aceste relații sînt îndeplinite de funcția $f(x)$ a lui Dirichlet, definită de (1.1.65) și de funcția

$$g(x) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } x \text{ rațional}, \\ 1 \text{ pentru } x \text{ irațional}, \end{cases} \tag{1.1.106}$$

în sensul integralei lui Lebesgue.

Scanned with OKEN Scanner

1.2. Derivarea distribuţiilor. Şiruri reprezentative δ

1.2.1. *Derivarea distribuţiilor*

1.2.1.1. Derivata unei distribuţii. Proprietăţi

Una dintre operaţiile care scot în evidenţă utilitatea noţiunii de distribuţie este derivarea. Într-adevăr, spre deosebire de funcţiile obişnuite, care nu sînt totdeauna derivabile, distribuţiile admit derivate de orice ordin; acest fapt conduce la numeroase aplicaţii.

Pentru a putea găsi o definiţie convenabilă a derivatei unei distribuţii oarecare, va trebui să plecăm de la derivata unei funcţii local integrabile, stabilind formula corespunzătoare pentru distribuţii regulate; în felul acesta, definiţia dată se va reduce — în cazul funcţiilor obişnuite — la cea clasică.

Fiind dată funcţia $f(x) \in C^1$, să considerăm funcţionala definită prin relaţia

$$(f'(x),\ \varphi(x)) = \int_R f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x,\ \ \varphi(x) \in K; \qquad (1.2.1)$$

în felul acesta, am obţinut o distribuţie corespunzătoare funcţiei continue $f'(x)$, care este derivata funcţiei $f(x)$. Integrînd prin părţi, putem scrie

$$(f'(x),\ \varphi(x)) = \int_R \varphi(x)\mathrm{d}f(x) = \varphi(x)f(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} -$$

$$-\int_R f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x;$$

dar funcţia fundamentală $\varphi(x)$ are suport compact, aşa încît

$$(f'(x),\ \varphi(x)) = -\,(f(x),\ \varphi'(x)),\ x \in R. \qquad (1.2.2)$$

Relaţia (1.2.2) este valabilă în cazul unei distribuţii de tip funcţie; prin definiţie, *derivata unei distribuţii* oarecare va fi precizată de aceeaşi relaţie. Se poate arăta

Scanned with OKEN Scanner

că funcţionala definită de relaţia (1.2.2) este liniară; în baza convergenţei în spaţiul K, ea este şi continuă. Prin urmare, derivata unei distribuţii este tot o distribuţie.

Pentru derivata de ordinul k putem scrie relaţia de definiţie

$$(f^{(k)}(x),\ \varphi(x)) = (-1)^k (f(x),\ \varphi^{(k)}(x)),\ x \in R. \qquad (1.2.3)$$

Observăm că, în baza translaţiei distribuţiilor şi a convergenţei în spaţiul distribuţiilor, derivata unei distribuţii poate fi definită ca şi în cazul clasic; astfel, dacă $f(x)$ este o distribuţie de o variabilă reală, atunci derivata ei este dată de relaţia

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}, \qquad (1.2.4)$$

limita fiind considerată în sensul convergenţei din spaţiul distribuţiilor. În felul acesta se pune în evidenţă şi *diferenţiala unei distribuţii*, care se defineşte la fel ca în cazul clasic.

Folosind această observaţie, se poate extinde cu uşurinţă regula de *derivare* a funcţiilor compuse la *distribuţii compuse*; fie astfel funcţia $u(x) \in C^\infty$, $x \in R$, iar $f(x)$ o distribuţie. Vom putea scrie relaţia de derivare

$$\frac{\mathrm{d}f(u(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} u'(x), \qquad (1.2.5)$$

care are sens, deoarece funcţia $u'(x) \in C^\infty$, putîndu-se efectua produsul ei cu distribuţia $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}$; această extindere este naturală, cuprinzînd cazul în care $f(x)$ este o funcţie.

În mod analog, dacă $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este o distribuţie de n variabile independente iar $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K$ este o funcţie fundamentală, derivata parţială în raport cu variabila x_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, va fi definită prin relaţia

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right) =$$

$$= -\left(f(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right); \qquad (1.2.6)$$

în general,

$$\left(\frac{\partial^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}}, \quad \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right) =$$

$$= (-1)^k \left(f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \frac{\partial^k \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right), \quad (1.2.7)$$

unde $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$; simbolic, putem scrie

$$(\mathrm{D}^k f, \varphi) = (-1)^k (f, \mathrm{D}^k \varphi).$$

Menţionăm şi proprietatea

$$\operatorname{supp} \mathrm{D}^k f \subset \operatorname{supp} f. \quad (1.2.8)$$

Definiţiile de mai sus rămîn valabile şi în cazul în care distribuţiile sînt definite pe spaţiul K^m, cu condiţia ca să avem $k \leqslant m$. De asemenea, definiţiile rămîn valabile şi pentru distribuţiile definite pe spaţiul fundamental S.

Fie $a(x) \in C^\infty$ o funcţie de o variabilă şi $f(x) \in K'$ o distribuţie de o variabilă; formula de derivare a unui produs, cunoscută din cazul clasic, se menţine sub forma

$$(af)' = af' + a'f. \quad (1.2.9)$$

În mod analog, această formulă se extinde şi pentru cazul mai multor variabile; astfel, pentru funcţia $a(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C^\infty$ şi pentru distribuţia $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K'$ putem scrie

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(af) = \frac{\partial a}{\partial x_i} f + a \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \quad (1.2.10)$$

În cazul distribuţiilor definite pe spaţiile K^m şi S, putem folosi formule analoage, în condiţiile în care are sens produsul dintre o funcţie şi o distribuţie.

În cazul clasic, derivata unei funcţii de mai multe variabile depinde, în general, de ordinea de derivare. În spaţiul distribuţiilor, derivata unei distribuţii de mai

Scanned with OKEN Scanner

multe variabile nu depinde de ordinea de derivare; de exemplu, pentru distribuţia $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K'$ putem scrie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \qquad (1.2.11)$$

Acest rezultat rămîne valabil pentru derivatele de orice ordin; putem astfel scrie simbolic

$$\mathrm{D}^{p+q} f = \mathrm{D}^p(\mathrm{D}^q f) = \mathrm{D}^q(\mathrm{D}^p f). \qquad (1.2.12)$$

Dacă $\theta(x)$ este distribuţia lui Heaviside, putem scrie

$$(\theta'(x),\ \varphi(x)) = -(\theta(x),\ \varphi'(x)) = -\int_R \theta(x)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\int_0^\infty \varphi'(x)\mathrm{d}x = -\varphi(x)\Big|_0^\infty = \varphi(0) = (\delta(x),\ \varphi(x)),$$

de unde rezultă

$$\theta'(x) = \delta(x). \qquad (1.2.13)$$

În general, pentru distribuţia $\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a lui Heaviside vom avea

$$\frac{\partial^n \theta(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} = \delta(x_1, x_2, \ldots, x_n); \qquad (1.2.14)$$

în particular

$$\frac{\partial^2 \theta(x, y)}{\partial x \partial y} = \delta(x, y).$$

Plecînd de la formula (1.2.3), găsim imediat

$$(\delta^{(k)}(x),\ \varphi(x)) = (-1)^k \varphi^{(k)}(0); \qquad (1.2.15)$$

în particular

$$(\delta'(x),\ \varphi(x)) = -\varphi'(0).$$

Scanned with OKEN Scanner

De asemenea, observăm că

$$\theta'(x - x^0) = \delta(x - x^0), \tag{1.2.16}$$

precum și

$$(\delta^{(k)}(x - x^0),\ \varphi(x)) = (-1)^k \varphi^{(k)}(x^0).$$

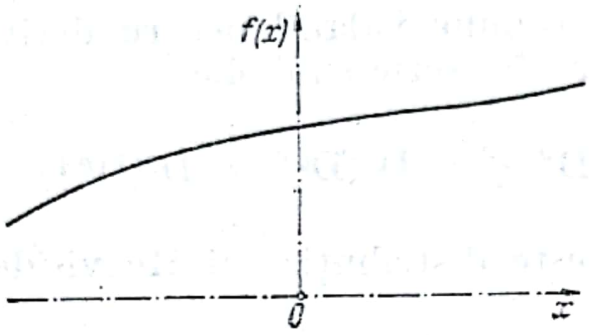


Fig. 1.10.

Fie acum $f(x)$ o funcție de clasa C^∞ care nu are nici o rădăcină și pentru care $f'(x) \neq 0$; în acest caz, funcția $f(x)$ este sau pozitivă pe R sau negativă pe R (fig. 1.10). Notînd cu $\theta(f(x))$ funcția lui Heaviside, putem scrie

$$\theta(f(x)) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } f(x) < 0, \\ 1 \text{ pentru } f(x) \geqslant 0. \end{cases} \tag{1.2.17}$$

Derivînd în sensul teoriei distribuțiilor după formula de derivare a distribuțiilor compuse și observînd că $\dfrac{\mathrm{d}\theta(f(x))}{\mathrm{d}x} = 0$, în condițiile date, căpătăm

$$f'(x)\delta(f(x)) = 0; \tag{1.2.18}$$

deoarece $f'(x) \neq 0$ peste tot, avem

$$\delta(f(x)) = 0. \tag{1.2.19}$$

În particular, aceste condiții sînt îndeplinite de funcția $f(x) = \mathrm{e}^x$; obținem astfel

$$\delta(\mathrm{e}^x) = 0. \tag{1.2.20}$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie acum $f(x, y) = xy$, iar funcția lui Heaviside în R^2

$$\theta(xy) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } xy < 0, \\ 1 \text{ pentru } xy \geqslant 0. \end{cases} \tag{1.2.21}$$

Observăm că această funcție se poate exprima și sub forma

$$\theta(xy) = \theta(x, y) + \theta(-x, -y).$$

Prin derivarea ei obținem

$$\frac{\partial^2 \theta(xy)}{\partial x \partial y} = \delta(x, y) + \delta(-x, -y) = 2\delta(x, y), \tag{1.2.22}$$

unde am ținut seama de proprietatea de paritate a distribuției lui Dirac; formula de derivare a distribuțiilor compuse ne conduce apoi la relația

$$2\delta(x, y) = \delta(xy) + xy\delta'(xy). \tag{1.2.23}$$

Menționăm încă o proprietate: *dacă derivata unei distribuții este nulă, atunci distribuția este o constantă.*

1.2.1.2. Derivata în sensul teoriei distribuțiilor. Derivata în sens obișnuit

În cele ce urmează vom face distincție între *derivata în sensul teoriei distribuțiilor* și *derivata în sens obișnuit*, acolo unde aceasta există (pentru distribuțiile de tip funcție); derivata în sens obișnuit va fi notată cu semnul „tilda". În acest caz, pentru distribuții generate de funcții f de clasa C^m vom putea scrie

$$\mathrm{D}^k f = \tilde{\mathrm{D}}^k f, \; k \leqslant m. \tag{1.2.24}$$

În cazul distribuției lui Heaviside $\theta(x)$, $x \in R$, observăm că derivata în sens obișnuit este nulă

$$\tilde{\theta}'(x) = 0 \tag{1.2.25}$$

Scanned with OKEN Scanner

în orice punct diferit de origine; diferența dintre formulele (1.2.13) și (1.2.25) pune, în mod pregnant, în evidență diferența care există între derivata în sensul teoriei distribuțiilor și derivata în sens obișnuit a unei distribuții.

În mod analog, pentru distribuția lui Heaviside în R^2 vom putea scrie

$$\tilde{D}^k \theta(x, y) = 0, \tag{1.2.26}$$

cu excepția punctelor de pe axele de coordonate.

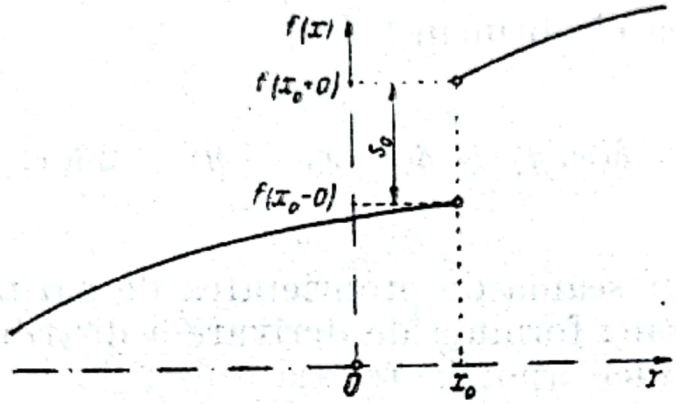


Fig. 1.11.

Printre funcțiile ce apar frecvent în aplicații, menționăm *funcțiile derivabile pe porțiuni*. Fie astfel $f(x)$ o funcție de o variabilă, cu derivata întîi continuă peste tot, cu excepția eventual a unui punct x_0, unde are o discontinuitate de speța întîi (fig. 1.11). Limitele laterale ale acestei funcții în punctul de discontinuitate sînt

$$\begin{aligned} l_d &= \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0), \\ l_s &= \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0), \end{aligned} \tag{1.2.27}$$

iar saltul funcției în acest punct se va exprima sub forma

$$s_0 = l_d - l_s = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0).$$

Dacă $\varphi(x) \in K$, putem scrie

$$(f'(x), \varphi(x)) = -(f(x), \varphi'(x)) =$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to +0} \left[\int_{-\infty}^{x_0 - \varepsilon} f(x) \varphi'(x)\, dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^{\infty} f(x) \varphi'(x) dx \right];$$

integrînd prin părţi şi trecînd la limită, obţinem

$$(f'(x),\ \varphi(x)) = -\lim_{\varepsilon \to +0} \left[f(x)\varphi(x) \Big|_{-\infty}^{x_0-\varepsilon} + \right.$$

$$\left. + f(x)\varphi(x) \Big|_{x_0+\varepsilon}^{\infty} \right] + \int_R \tilde{f}'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = s_0\varphi(x) +$$

$$+ (\tilde{f}'(x),\ \varphi(x)) = (\tilde{f}'(x) + s_0\delta(x - x_0),\ \varphi(x)),$$

de unde, în baza egalităţii a două distribuţii, va rezulta relaţia

$$f'(x) = \tilde{f}'(x) + s_0\delta(x - x_0). \qquad (1.2.28)$$

Deci derivata în sensul teoriei distribuţiilor este egală cu suma dintre derivata în sens obişnuit şi produsul saltului cu distribuţia lui Dirac concentrată în punctul de discontinuitate.

În particular, dacă funcţia este continuă, avem $s_0 = 0$ şi

$$f'(x) = \tilde{f}'(x); \qquad (1.2.29)$$

în acest caz, derivata în sensul teoriei distribuţiilor este egală cu derivata în sens obişnuit.

Dacă funcţia $f(x)$ este de clasa C^1 peste tot, cu excepţia punctelor x_i, $(i = 1, 2, \ldots, p)$, unde are discontinuităţi de speţa întîi, cu salturile

$$s_i = f(x_i + 0) - f(x_i - 0),\ (i = 1,\ 2, \ldots, p), \qquad (1.2.30)$$

vom putea scrie relaţia

$$f'(x) = \tilde{f}'(x) + \sum_{i=1}^{p} s_i\delta(x - x_i). \qquad (1.2.31)$$

Punctele de discontinuitate pot forma şi o mulţime numărabilă, de exemplu dacă $f(x)$ este o funcţie periodică.

Să admitem acum că funcţia $f(x)$ este de clasa C^k peste tot, cu excepţia punctului x_0, unde atît funcţia cît şi derivatele ei în sens obişnuit pînă la ordinul k inclusiv

Scanned with OKEN Scanner

au discontinuităţi de speţa întîi; vom nota cu s_i, $(i = 0, 1, 2, \ldots, k-1)$, saltul funcţiei $\widetilde{f^{(i)}}(x)$ în punctul x_0. Derivînd succesiv relaţia (1.2.28), căpătăm formula

$$f^{(k)}(x) = \tilde{f}^{(k)}(x) + \sum_{i=0}^{k-1} s_i \delta^{(k-i-1)}(x - x_0). \qquad (1.2.32)$$

Pentru funcţiile de mai multe variabile se pot stabili formule analoage.

1.2.1.3. Exemple

Putem calcula derivata distribuţiei lui Heaviside cu ajutorul formulei (1.2.28). Într-adevăr, observînd că $s_0 = \theta(0+0) - \theta(0-0) = 1$ şi ţinînd seama de (1.2.25), regăsim formula (1.2.13).

Pentru a calcula derivata distribuţiei corespunzătoare funcţiei caracteristice unui interval (1.1.95), putem folosi relaţia (1.1.98) sau formula (1.2.31); găsim astfel

$$h'(x) = \delta(x + a) - \delta(x - a). \qquad (1.2.33)$$

Fie acum funcţia modul (fig. 1.12)

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x \text{ pentru } x < 0, \\ x \text{ pentru } x \geqslant 0. \end{cases} \qquad (1.2.34)$$

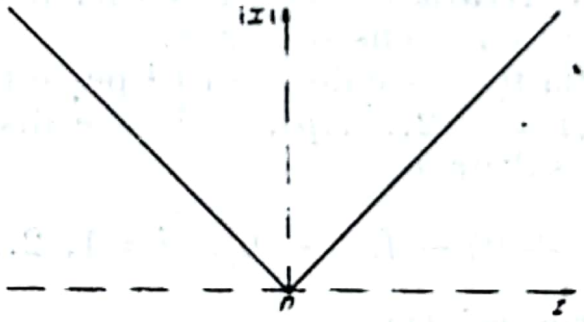


Fig. 1.12.

Această funcţie este continuă peste tot; ea este şi derivabilă peste tot, cu excepţia originii, unde $f'(0-0) = -1$, $f'(0+0) = 1$. Vom putea scrie derivata în sensul teoriei distribuţiilor sub forma

$$|x|' = |\tilde{x}|' = \begin{cases} -1 \text{ pentru } x < 0 \\ 1 \text{ pentru } x \geqslant 0 \end{cases} = 2\theta(x) - 1, \qquad (1.2.34')$$

această derivată coincizînd cu derivata în sens obişnuit.

Scanned with OKEN Scanner

Plecînd de la relaţia (1.1.73), putem stabili, prin inducţie, relaţiile

$$x^p \delta^{(k)}(x) = 0, \ (k = 0, 1, 2, \ldots, p-1). \tag{1.2.35}$$

Plecînd de la aceeaşi relaţie, în cazul $n = 1$, putem scrie succesiv

$$\begin{aligned} &\delta(x) + x\delta'(x) = 0, \\ &2\delta'(x) + x\delta''(x) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &k\delta^{(k-1)}(x) + x\delta^{(k)}(x) = 0. \end{aligned} \tag{1.2.36}$$

Prin eliminări succesive, găsim

$$x^k \delta^{(k)}(x) = (-1)^k k!\, \delta(x), \ k \in N. \tag{1.2.37}$$

Pe lîngă distribuţia lui Heaviside, vom introduce şi distribuţia $\theta(-x)$, definită de funcţia (fig. 1.13)

$$\theta(-x) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } x \leqslant 0, \\ 0 \text{ pentru } x > 0; \end{cases} \tag{1.2.38}$$

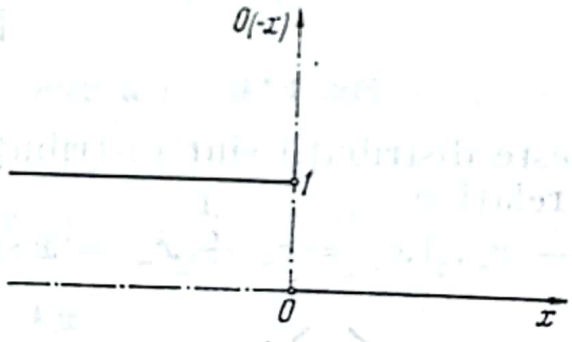


Fig. 1.13.

se observă că putem scrie relaţiile

$$\theta(x) + \theta(-x) = 1(x), \tag{1.2.39}$$

$$\theta(x) - \theta(-x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 \text{ pentru } x < 0, \\ 1 \text{ pentru } x > 0, \end{cases} \tag{1.2.39'}$$

unde $1(x)$ este o funcţie egală cu unitatea pentru orice $x \in R$ (fig. 1.14, *a*), iar sgn x, $x \in R$, este funcţia care indică semnul lui x (fig. 1.14, *b*).

Scanned with OKEN Scanner

Vom introduce și distribuțiile corespunzătoare funcțiilor x_+ și x_-, definite sub forma (fig. 1.15):

$$x_+ = x\theta(x) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } x < 0, \\ x \text{ pentru } x \geqslant 0, \end{cases} \tag{1.2.40}$$

$$x_- = -x\theta(-x) = \begin{cases} -x \text{ pentru } x \leqslant 0, \\ 0 \text{ pentru } x > 0; \end{cases} \tag{1.2.40'}$$

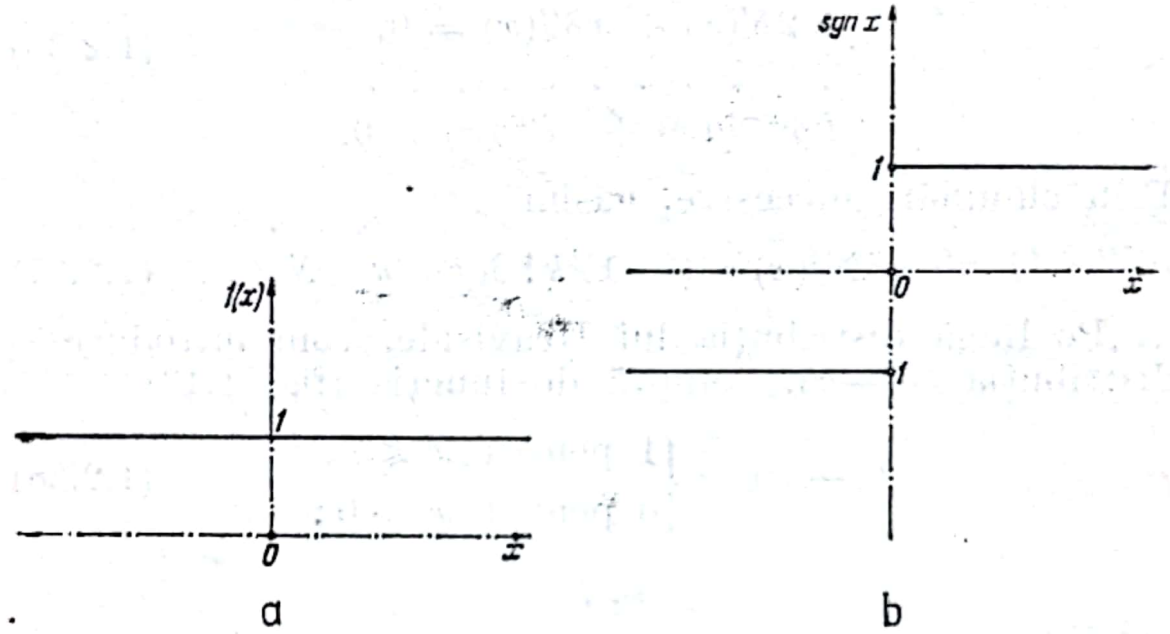


Fig. 1.14.

observăm că aceste distribuții sînt distribuții temperate.

Menționăm relațiile

$$x = x_+ - x_-, \quad |x| = x_+ + x_- = x \operatorname{sgn} x. \tag{1.2.41}$$

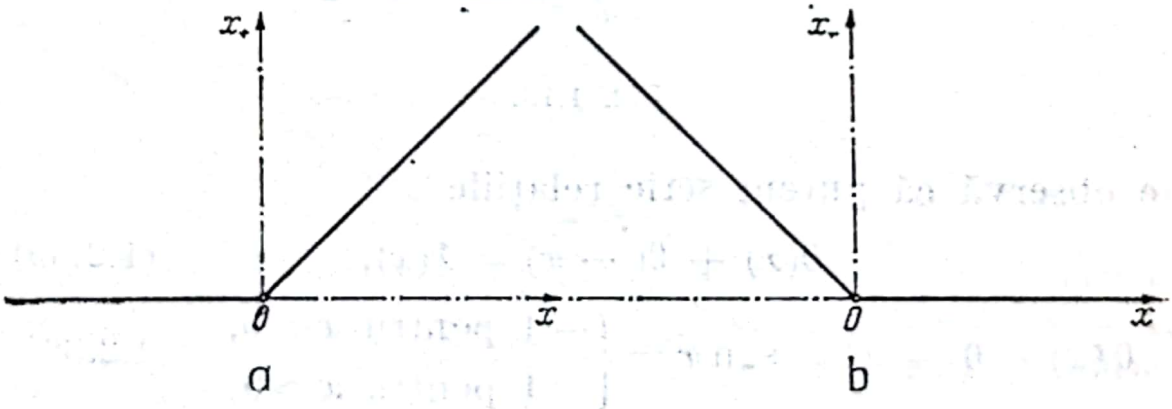


Fig. 1.15.

Putem calcula derivatele

$$(x_+)' = \theta(x), \quad (x_-)' = -\theta(-x); \tag{1.2.42}$$

Scanned with OKEN Scanner

de asemenea, vom avea

$$(x_+^p)' = p x_+^{p-1}. \tag{1.2.42'}$$

Introducînd distribuţia $\mathrm{Vp}\,\frac{1}{x}$, putem calcula

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x + \mathrm{i}\varepsilon}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{i}\pi\varphi(0) + \\ + \mathrm{Vp}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x,\ \varphi(x) \in K;$$

aceasta ne permite să scriem *relaţiile lui Sohoţki*

$$\frac{1}{x + \mathrm{i}0} = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{x + \mathrm{i}\varepsilon} = \mathrm{Vp}\,\frac{1}{x} - \mathrm{i}\pi\delta(x), \tag{1.2.43}$$

$$\frac{1}{x - \mathrm{i}0} = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{x - \mathrm{i}\varepsilon} = \mathrm{Vp}\,\frac{1}{x} + \mathrm{i}\pi\delta(x). \tag{1.2.43'}$$

W. Heisenberg a introdus distribuţiile $\delta_+(x)$ şi $\delta_-(x)$, definite prin relaţiile

$$\delta_+(x) = \frac{1}{2}\,\delta(x) - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\,\mathrm{Vp}\,\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\,\delta(x) + \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\,\mathrm{VP}\,\frac{1}{x}, \tag{1.2.44}$$

$$\delta_-(x) = \frac{1}{2}\,\delta(x) + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\,\mathrm{Vp}\,\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\,\delta(x) - \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\,\mathrm{Vp}\,\frac{1}{x}; \tag{1.2.44'}$$

observăm că avem

$$\delta_+(x) + \delta_-(x) = \delta(x). \tag{1.2.45}$$

Ţinînd seama de formulele lui Sohoţki, mai putem scrie

$$\delta_+(x) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\mathrm{i}}{x + \mathrm{i}0},\quad \delta_-(x) = -\frac{1}{2\pi}\,\frac{\mathrm{i}}{x - \mathrm{i}0}\cdot \tag{1.2.46}$$

Scanned with OKEN Scanner

De asemenea, putem stabili unele rezultate, care generalizează formulele lui Sohoțki, sub forma

$$\frac{1}{(x+\mathrm{i}0)^p} = \mathrm{Vp}\,\frac{1}{x^p} - (-1)^{p-1}\,\frac{\mathrm{i}\pi}{(p-1)!}\,\delta^{(p-1)}(x), \tag{1.2.47}$$

$$\frac{1}{(x-\mathrm{i}0)^p} = \mathrm{Vp}\,\frac{1}{x^p} + (-1)^{p-1}\,\frac{\mathrm{i}\pi}{(p-1)!}\,\delta^{(p-1)}(x),\ p \in N.$$

Dacă definim distribuția $\ln|x|$ prin relația

$$(\ln|x|,\ \varphi(x)) = \mathrm{Vp}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\ln|x|\,\mathrm{d}x,\ \varphi(x) \in K, \tag{1.2.48}$$

atunci vom putea scrie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|x| = \mathrm{Vp}\,\frac{1}{x}; \tag{1.2.49}$$

de asemenea, putem demonstra relația

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{Vp}\,\frac{1}{x} = -\mathrm{Vp}\,\frac{1}{x^2}. \tag{1.2.50}$$

1.2.1.4. Serii de distribuții

În electrotehnică apare adesea unda în „dinți de ferăstrău"; aceasta este o funcție periodică de perioadă T și amplitudine egală cu unitatea (fig. 1.16), definită prin

$$f(x) = \frac{2}{T}\,x,\ x \in \left[-\frac{T}{2},\ \frac{T}{2}\right). \tag{1.2.51}$$

Scanned with OKEN Scanner

Punctele de discontinuitate ale acestei funcţii periodice sînt $x_i = (2i+1)\frac{T}{2}$, $i \in Z$, iar salturile $s_i = -1-1 = -2$; aplicînd formula (1.2.31), obţinem

$$f'(x) = \frac{2}{T} - 2\sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta\left(x - (2i+1)\frac{T}{2}\right). \quad (1.2.52)$$

În mod analog, unda rectangulară de amplitudine egală cu unitatea şi de perioadă T (fig. 1.17), definită sub forma

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ pentru } x \in \left[-\frac{T}{2}, 0\right), \\ \\ 1 \text{ pentru } x \in \left[0, \frac{T}{2}\right), \end{cases} \quad (1.2.53)$$

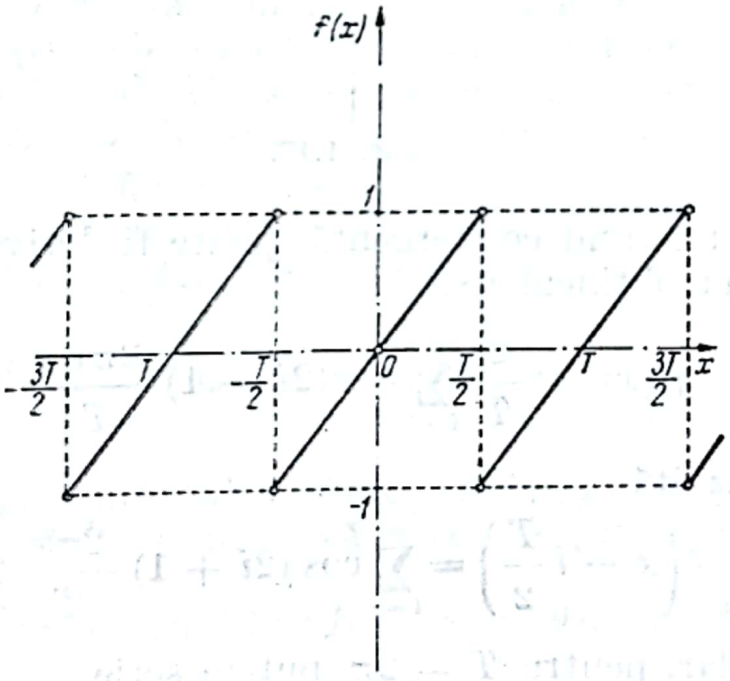


Fig. 1.16.

va avea punctele de discontinuitate $x_i = i\frac{T}{2}$, $i \in Z$, şi $s_i = 2$, astfel încît

$$f'(x) = 2\sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta\left(x - i\frac{T}{2}\right). \quad (1.2.54)$$

Scanned with OKEN Scanner

Dezvoltînd în serie Fourier, obţinem o serie în sinus de forma

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)\pi} \sin(2i+1)\frac{2\pi x}{T}.$$

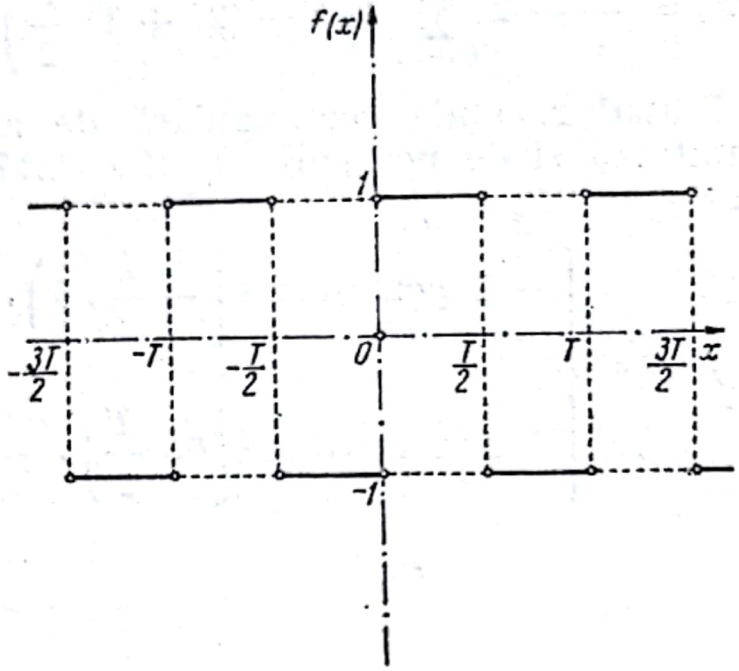


Fig. 1.17.

Această serie fiind convergentă, poate fi derivată termen cu termen; obţinem astfel

$$f'(x) = \frac{2}{T} \sum_{i=0}^{\infty} \cos(2i+1)\frac{2\pi x}{T}.$$

De aici rezultă

$$T \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta\left(x - i\frac{T}{2}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \cos(2i+1)\frac{2\pi x}{T}; \qquad (1.2.55)$$

în particular, pentru $T = 2\pi$ putem scrie

$$2\pi \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(x - i\pi) = \sum_{i=0}^{\infty} \cos(2i+1)x.$$

În felul acesta, folosind dezvoltarea în serie Fourier şi derivarea în sensul teoriei distribuţiilor, se pot obţine relaţii remarcabile între serii.

Scanned with OKEN Scanner

În general, dacă seria de distribuţii de termen general $f_i(x) \in K'$ converge către distribuţia $f(x) \in K'$, deci dacă avem

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) = f(x), \tag{1.2.56}$$

atunci această serie poate fi derivată termen cu termen şi putem scrie

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i^{(k)}(x) = f^{(k)}(x), \; k \subset N.$$

1.2.1.5. Alte proprietăţi ale derivatei

Am văzut că pentru funcţiile de o variabilă şi de clasa C^1 peste tot, cu excepţia unor puncte în număr finit, unde apar discontinuităţi de prima speţă, are loc formula (1.2.31). O formulă similară se poate stabili şi pentru derivatele parţiale de ordinul întîi ale funcţiilor de mai multe variabile de clasa C^1 peste tot, cu excepţia unui arc de curbă, unde apar discontinuităţi de speţa întîi.

Astfel, dacă $f(x, y)$ este o funcţie de clasa C^1 în R^2, cu excepţia unei curbe Γ, unde are discontinuităţi de speţa întîi (fig. 1.18), atunci are loc relaţia

$$(f'_y(x, y), \varphi(x, y)) = (\widetilde{f'_y}(x, y), \varphi(x, y)) + \int_\Gamma s_y \varphi(x, y)\, dx, \tag{1.2.57}$$

unde s_y reprezintă saltul funcţiei $f(x, y)$ la traversarea curbei Γ, în direcţia pozitivă a axei Oy, definit prin

$$s_y = f(x_\Gamma, y_\Gamma + 0) - f(x_\Gamma, y_\Gamma - 0), \; (x_\Gamma, y_\Gamma) \in \Gamma.$$

Într-adevăr, fie $\varphi(x,y) \in K$; avem

$$(f'_y(x, y), \varphi(x, y)) = -(f(x, y), \varphi'_y(x, y)) =$$

$$= -\iint_{R^2} f(x, y) \varphi'_y(x, y)\, dx\, dy = -\int_R dx \int_R f(x, y)\, d_y \varphi(x, y),$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$\int_R f(x,y)\,\mathrm{d}_y\varphi(x,y) = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_{-\infty}^{y_\Gamma-\varepsilon} f(x,y)\,\mathrm{d}_y\varphi(x,y) + \right.$$

$$\left. + \int_{y_\Gamma+\varepsilon}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}_y\varphi(x,y)\right] = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[f(x,y)\varphi(x,y)\Big|_{-\infty}^{y_\Gamma-\varepsilon} + \right.$$

$$+ f(x,y)\varphi(x,y)\Big|_{y_\Gamma+\varepsilon}^{\infty} - \int_{-\infty}^{y_\Gamma-\varepsilon} \varphi(x,y)\widetilde{f}'_y(x,y)\mathrm{d}y -$$

$$\left. - \int_{y_\Gamma+\varepsilon}^{\infty} \varphi(x,y)\,\widetilde{f}'_y(x,y)\mathrm{d}y\right] = -\,s_y\varphi(x_\Gamma, y_\Gamma) -$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,y)\widetilde{f}'_y(x,y)\mathrm{d}y.$$

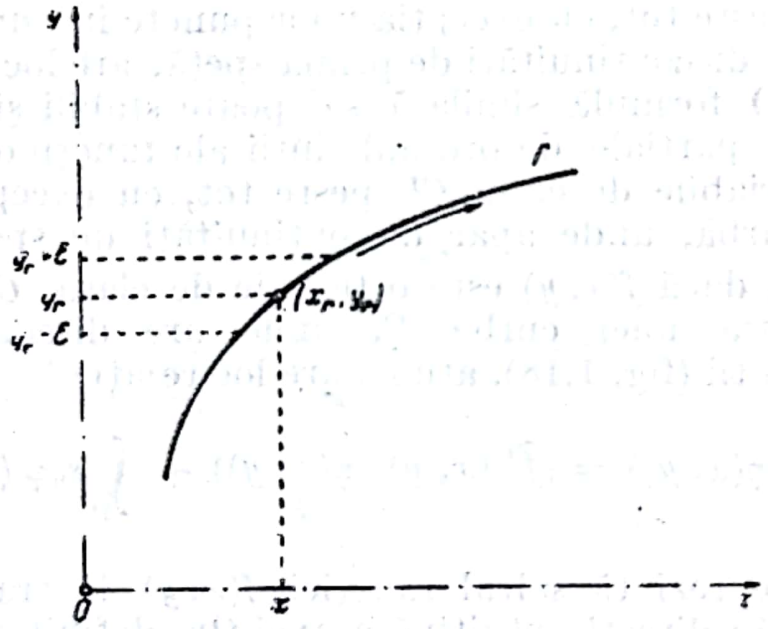


Fig. 1.18.

Obţinem

$$(f'_y(x,y),\varphi(x,y)) = \iint_{R^2} \varphi(x,y)\widetilde{f}'_y(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_R s_y\varphi(x_\Gamma, y_\Gamma)\mathrm{d}x,$$

ceea ce ne conduce la formula (1.2.57), dacă ţinem seama de faptul că a doua integrală se ia pe curba Γ, reprezentînd o integrală curbilinie.

Scanned with OKEN Scanner

În mod analog, dacă se notează cu s_x saltul funcției $f(x, y)$ la traversarea curbei Γ, în direcția pozitivă a axei Ox, avem

$$(f'_x(x, y), \varphi(x, y)) = (\tilde{f}'_x(x, y), \varphi(x, y)) + \int_\Gamma s_x \varphi(x, y)\mathrm{d}y. \quad (1.2.58)$$

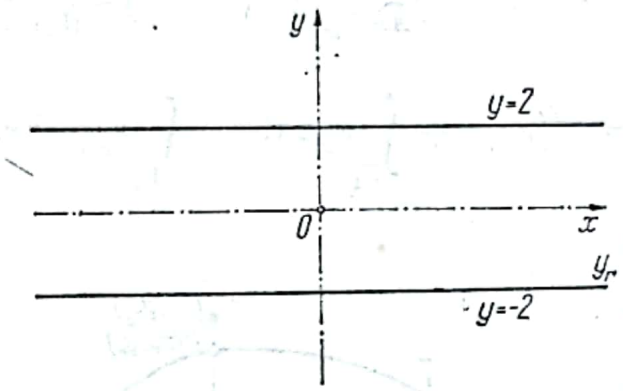


Fig. 1.19.

În R^3 putem scrie, de asemenea,

$$(f'_x(x, y, z), \varphi(x, y, z)) = (\tilde{f}'_x(x, y, z), \varphi(x, y, z)) +$$

$$+ \iint_S s_x \varphi(x, y, z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \quad (1.2.58')$$

unde S este o suprafață netedă pe porțiuni.

De exemplu, fie funcția (fig. 1.19)

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } -2 \leqslant y \leqslant 2, \\ 0 \text{ în rest,} \end{cases} \quad (1.2.59)$$

care este egală cu unitatea în banda delimitată de $y = -2$ și $y = 2$, fiind nulă în rest ; aplicînd formulele precedente și observînd că $\tilde{f}'_x = 0, \tilde{f}'_y = 0, s_y|_{y=-2} = 1, s_y|_{y=2} = -1,$ $s_x|_{y=-2} = s_x|_{y=2} = 0,$ căpătăm

$$(f'_x(x, y), \varphi(x, y)) = (\tilde{f}'_x(x, y), \varphi(x, y)) = 0 \Rightarrow f'_x(x, y) = 0, \quad (1.2.60)$$

$$(f'_y(x, y), \varphi(x, y)) = \int_R \left[\varphi(x, -2) - \varphi(x, 2)\right]\mathrm{d}x. \quad (1.2.60')$$

Se pot obține rezultate similare și pentru contururi închise. Fie astfel $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma \in R$ o curbă închisă, netedă pe porțiuni (fig. 1.20); aplicînd formula (1.2.57) pentru arcele de curbă Γ_1 și Γ_2, rezultă

$$(f'_y, \varphi) = (\tilde{f}'_y, \varphi) + \int_{\widehat{AB}(\Gamma_1)} s_y \varphi \, dx + \int_{\widehat{AB}(\Gamma_2)} s_y \varphi \, dx =$$

$$= (\tilde{f}'_y, \varphi) + \int_{\Gamma_1} s_y \varphi \, dx - \int_{\Gamma_2} s_y \varphi \, dx,$$

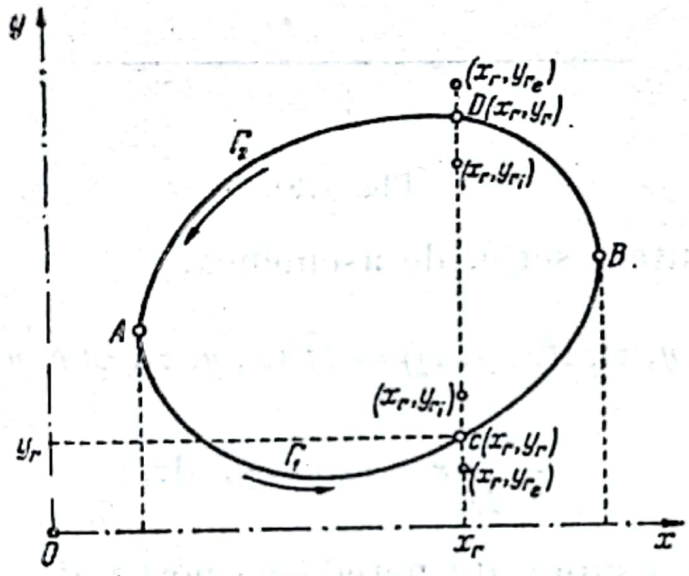


Fig. 1.20.

curba Γ fiind parcursă în sens direct. Vom putea scrie

$$(f'_y(x, y), \varphi(x, y)) = (\tilde{f}'_y(x, y), \varphi(x, y)) + \int_\Gamma (\Delta f(x,y))_y \varphi(x,y) dx, \tag{1.2.61}$$

unde $(\Delta f)_y$ reprezintă saltul funcției f la traversarea curbei Γ; acest salt are expresia

$$(\Delta f(x, y))_y = f(x_\Gamma, y_{\Gamma_i}) - f(x_\Gamma, y_{\Gamma_e}), \tag{1.2.62}$$

indicele i corespunzînd interiorului domeniului care are ca frontieră curba Γ, iar indicele e exteriorului acestui domeniu.

Scanned with OKEN Scanner

În particular, dacă funcţia $f(x, y)$ este nulă în exteriorul domeniului delimitat de curba Γ, formula (1.2.61) capătă forma

$$(f'_y(x, y), \varphi(x, y)) = (\tilde{f}'_y(x, y), \varphi(x, y)) + \int_\Gamma f(x, y)\varphi(x, y)\mathrm{d}x. \tag{1.2.63}$$

În mod analog, putem scrie

$$(f'_x(x, y), \varphi(x, y)) = (\tilde{f}'_x(x, y), \varphi(x, y)) + \int_\Gamma (\Delta f(x, y))_x \varphi(x, y)\,\mathrm{d}y, \tag{1.2.61'}$$

$$(f'_x(x, y), \varphi(x, y)) = (\tilde{f}'_x(x, y), \varphi(x, y)) + \int_\Gamma f(x, y)\varphi(x, y)\mathrm{d}y. \tag{1.2.63'}$$

Se pot stabili formule similare şi pentru funcţiile de mai multe variabile; dacă, de exemplu, funcţia $f(x, y, z)$ este diferită de zero, respectiv nulă în exteriorul domeniului D, limitat de suprafaţa închisă S, netedă pe porţiuni, vom putea scrie

$$(f'_x(x, y, z), \varphi(x, y, z)) = (\tilde{f}'_x(x, y, z), \varphi(x, y, z)) + \iint_S (\Delta f(x, y, z))_x \varphi(x, y, z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \tag{1.2.64}$$

$$(f'_x(x, y, z), \varphi(x, y, z)) = (\tilde{f}'_x(x, y, z), \varphi(x, y, z)) + \iint_S f(x, y, z)\varphi(x, y, z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \tag{1.2.64'}$$

precum şi relaţiile corespunzătoare direcţiilor precizate de axele Oy şi Oz.

Fie, de exemplu, pătratul $OABC$, de latură a (fig.1.21) şi funcţia $f(x, y)$, nulă în exteriorul pătratului şi avînd

Scanned with OKEN Scanner

valoarea 1 în interior. Observînd că $\widetilde{f}'_x = 0$, $\widetilde{f}'_y = 0$, iar $f(x, y) = 1$ pe laturile pătratului, putem scrie

$$(f'_x(x, y), \varphi(x, y)) = \int_\Gamma \varphi(x, y)dy = \int_{\widehat{OA}} \varphi(x, y)dy +$$

$$+ \int_{\widehat{AB}} \varphi(x, y)dy + \int_{\widehat{BC}} \varphi(x, y)dy + \int_{\widehat{CO}} \varphi(x, y)dy =$$

$$= \int_0^a \varphi(a, y)dy + \int_a^0 \varphi(0, y)\,dy;$$

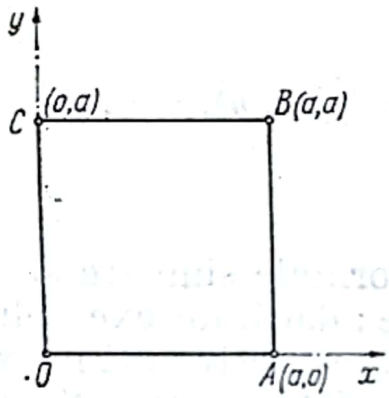


Fig 1.21.

de aici rezultă că

$$(f'_x(x, y), \varphi(x, y)) = \int_0^a [\varphi(a, y) - \varphi(0, y)]dy \quad (1.2.65)$$

și, în mod analog,

$$(f'_y(x, y), \varphi(x, y)) = \int_0^a [\varphi(x, 0) - \varphi(x, a)]dx.$$

Menționăm că salturile ce figurează în formulele privitoare la curbe sau suprafețe deschise sînt calculate în sensul pozitiv al axei respective; dacă se schimbă acest sens, trebuie ca salturile să se ia cu semn contrar. În cazul curbelor sau suprafețelor închise, se consideră salturile înspre interiorul domeniului care are drept frontieră aceste curbe sau suprafețe.

Scanned with OKEN Scanner

1.2.2. *Formule de descompunere a unor distribuţii*

1.2.2.1. Rezultate generale

Pentru interpretarea a diferite fenomene fizice, este adesea utilă reprezentarea unor distribuţii cu ajutorul cîtorva distribuţii mai simple; în general, distribuţia lui Dirac admite asemenea *formule de descompunere.*

Teorema 1.2.1. *Dacă funcţiile* $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C^\infty$, $(i = 1,2,\ldots, n)$, *definite în* R^n, *admit numai rădăcina* $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, *astfel încît determinantul funcţional*

$$\mathrm{D}(x^0) = \left| \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \right|_{x = x^0} \neq 0, \qquad (1.2.66)$$

atunci are loc relaţia

$$\delta(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \frac{1}{|\mathrm{D}(x^0)|}\, \delta(x - x^0) =$$

$$= \frac{1}{|\mathrm{D}(x^0)|}\, \delta(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, \ldots, x_n - x_n^0). \qquad (1.2.67)$$

Într-adevăr, putem scrie

$$\int_{R^n} \delta(f_1, f_2, \ldots, f_n)\, \varphi(f_1, f_2, \ldots, f_n)\, \mathrm{d}f_1 \mathrm{d}f_2 \ldots \mathrm{d}f_n = \varphi(0, 0, \ldots, 0),$$

unde

$$\mathrm{d}f_1 \mathrm{d}f_2 \ldots \mathrm{d}f_n = |\mathrm{D}(x)|\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n;$$

obţinem astfel

$$\int_{R^n} \delta(f_1, f_2, \ldots, f_n)\, \varphi(f_1, f_2, \ldots, f_n)\, |\mathrm{D}(x)|\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n =$$

$$= \varphi(0, 0, \ldots, 0).$$

Observînd că funcţia

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = |\mathrm{D}(x)|\, \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Scanned with OKEN Scanner

este tot o funcţie fundamentală, căpătăm

$$\int_{R^n} \delta(f_1, f_2, \ldots, f_n)\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_n = \\ = \varphi(0, 0, \ldots, 0);$$

dar

$$\varphi(0, 0, \ldots, 0) = \frac{1}{|\mathrm{D}(x^0)|}\psi(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0),$$

astfel încît putem scrie

$$\int_{R^n} \delta(f_1, f_2, \ldots, f_n)\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_n = \\ = \frac{1}{|\mathrm{D}(x^0)|}\psi(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0),$$

de unde rezultă relaţia (1.2.67).

Această relaţie poate fi generalizată pentru cazul în care funcţiile $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(i = 1,2,\ldots,n)$, admit un număr finit sau infinit de rădăcini simple. Altfel, putem scrie

$$\delta(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \sum_j \frac{1}{|\mathrm{D}(x^j)|}\delta(x - x^j). \qquad (1.2.68)$$

În particular, avem

$$\delta(f(x)) = \sum_j \frac{1}{|f'(x^j)|}\delta(x - x^j), \quad x, x^j \in R\,. \qquad (1.2.69)$$

Se mai poate ajunge la acest rezultat, folosind regula de derivare a distribuţiilor compuse.

1.2.2.2. Aplicaţii

Fie $\theta(x)$ distribuţia lui Heaviside. Vom defini distribuţia (fig. 1.22)

$$\theta(x^2 - a^2) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x^2 - a^2 < 0 \\ 1 & \text{pentru } x^2 - a^2 \geqslant 0 \end{cases} = \\ = \begin{cases} 0 & \text{pentru } |x| < a, \\ 1 & \text{pentru } |x| \geqslant a,\ a > 0\,; \end{cases} \qquad (1.2.70)$$

Scanned with OKEN Scanner

această distribuție se mai poate exprima și sub forma

$$\theta(x^2 - a^2) = 1 - \theta(x + a) + \theta(x - a),\ a > 0.$$

Deoarece funcția $u(x) = x^2 - a^2$ este indefinit derivabilă, putem aplica formula (1.2.5) a derivării compuse, obținînd

$$2x\delta(x^2 - a^2) = \delta(x - a) - \delta(x + a),\ a > 0; \quad (1.2.71)$$

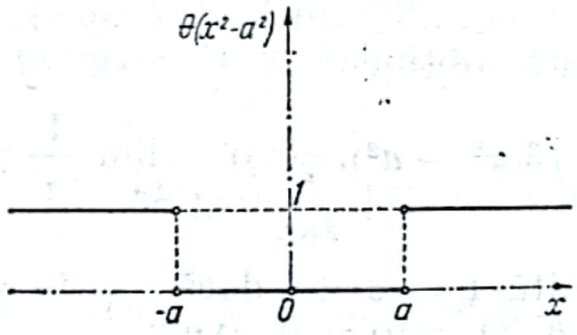


Fig. 1.22.

funcția $v(x) = x$ nu se anulează în punctele $x = -a$ și $x = a$, așa încît relația (1.2.71) se mai poate scrie sub forma

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2x}[\delta(x - a) - \delta(x + a)],\ a > 0. \quad (1.2.71')$$

Folosind formula (1.1.72), mai putem scrie

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a}[\delta(x - a) + \delta(x + a)],\ a > 0. \quad (1.2.71'')$$

Se ajunge la același rezultat, aplicînd formula (1.2.69).

Observăm că formula (1.2.69) nu se poate aplica pentru $\delta(x^2)$, deoarece ecuația $x^2 = 0$ are o rădăcină dublă în origine; în consecință, distribuția $\delta(x^2)$ nu are deocamdată sens. Calculînd $\lim_{a \to +0} \delta(x^2 - a^2)$, putem da un sens și acestei distribuții.

Dacă $\varphi(x) \in K$ este o funcție fundamentală, putem scrie

$$(\delta(x^2 - a^2), \varphi(x)) = \frac{1}{2a}[\varphi(a) + \varphi(-a)],\ a > 0;$$

dar

$$\varphi(a) = \varphi(0) + a\varphi'(\xi_1), \quad 0 < \xi_1 < a,$$
$$\varphi(-a) = \varphi(0) - a\varphi'(\xi_2), \quad -a < \xi_2 < 0,$$

deci

$$(\delta(x^2 - a^2), \varphi(x)) = \frac{1}{a}\varphi(0) + \frac{1}{2}[\varphi'(\xi_1) - \varphi'(\xi_2)], \; a > 0.$$

Trecînd la limită, obţinem

$$\lim_{a \to +0} (\delta(x^2 - a^2), \varphi(x)) = \lim_{a \to +0} \frac{1}{a}\varphi(0). \qquad (1.2.72)$$

Această limită nu există dacă $\varphi(0) \neq 0$; în cazul în care $\varphi(x) \in K$ şi $\varphi(0) = 0$, avem

$$\lim_{a \to +0} \delta(x^2 - a^2) = 0,$$

ceea ce dă un sens distribuţiei $\delta(x^2)$.

Să considerăm acum distribuţia

$$\theta(x^2 + a^2) = 0 \text{ pentru } x \in R, \; a \neq 0. \qquad (1.2.73)$$

Observînd că funcţia $w(x) = x^2 + a^2 \in C^\infty$, putem aplica formula (1.2.5) a derivării compuse; obţinem

$$x\delta(x^2 + a^2) = 0. \qquad (1.2.74)$$

Aplicînd formula (1.2.69) distribuţiilor $\delta(\sin x)$ şi $\delta(\cos x)$, găsim de asemenea

$$\delta(\sin x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(x - i\pi), \qquad (1.2.75)$$

$$\delta(\cos x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta\left(x - (2i+1)\frac{\pi}{2}\right). \qquad (1.2.75')$$

Să căutăm acum o descompunere pentru distribuţia $\delta(x^2 - a^2, y)$. În acest caz, aplicăm formula (1.2.67); funcţiile $f_1(x, y) = x^2 - a^2$ şi $f_2(x, y) = y$ au rădăcinile

Scanned with OKEN Scanner

simple $(a, 0)$ şi $(-a, 0)$, iar determinantul funcţional este $D(x, y) = 2x$, aşa încît obţinem

$$\delta(x^2 - a^2, y) = \frac{1}{2a}[\delta(x - a, y) + \delta(x + a, y)], \; a > 0. \tag{1.2.76}$$

În cazul în care $f_1(x,y) = x^2 - a^2$, $f_2(x, y) = y^2 - b^2$, $a, b > 0$, obţinem patru perechi de rădăcini simple (a, b), $(-a, b)$, $(-a, -b)$ şi $(a, -b)$, determinantul funcţional fiind $D(x, y) = 4xy$. În baza formulei (1.2.67), rezultă

$$\delta(x^2 - a^2, y^2 - b^2) = \frac{1}{4ab}[\delta(x - a, y - b) + \delta(x + a, y - b) + \delta(x + a, y + b) + \delta(x - a, y + b)], \quad a, b > 0. \tag{1.2.77}$$

În mod analog, obţinem

$$\delta(\sin x, y) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(x - i\pi, y). \tag{1.2.78}$$

Înmulţind formula (1.2.76) cu x, căpătăm

$$x\delta(x^2 - a^2, y) = \frac{x}{2a}[\delta(x - a, y) + \delta(x + a, y)] = \frac{1}{2}[\delta(x - a, y) - \delta(x + a, y)], \quad a > 0,$$

de unde

$$2x\delta(x^2 - a^2, y) = \delta(x - a, y) - \delta(x + a, y), \; a > 0; \tag{1.2.79}$$

mai general, putem scrie

$$2x\delta(x^2 - a^2, y - b) = \delta(x - a, y - b) - \delta(x + a, y - b), \; a > 0,$$

$$4xy\delta(x^2 - a^2, y^2 - b^2) = \delta(x - a, y - b) - \delta(x + a, y - b) + \delta(x + a, y + b) - \delta(x - a, y + b), \quad a, b > 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

1.2.3. *Şiruri reprezentative* δ

1.2.3.1. Noţiunea de şir reprezentativ δ

În multe probleme cu caracter teoretic sau practic (serii Fourier, integrale Fourier etc.) apar şiruri de funcţii local integrabile, care sînt convergente în sensul convergenţei din spaţiul distribuţiilor, avînd drept limită distribuţia δ a lui Dirac; asemenea şiruri de funcţii local integrabile se numesc *şiruri reprezentative* δ.

Dacă $f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este un şir de funcţii local integrabile, astfel încît

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \delta(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (1.2.80)$$

atunci $f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $k \in N_0$, reprezintă un şir reprezentativ δ; observăm că relaţia (1.2.80) de definiţie a unui asemenea şir este echivalentă cu

$$\lim_{k\to\infty} (f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n), \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)) =$$

$$= (\delta(x_1, x_2, \ldots, x_n), \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \varphi(0, 0, \ldots, 0), \qquad (1.2.80')$$

unde $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K$.

Putem spune că orice termen al şirului $f_k(x)$ reprezintă o anumită aproximaţie a distribuţiei δ a lui Dirac; acest fapt este deosebit de important din punct de vedere practic. Într-adevăr, presupunînd că dorim să obţinem valori numerice într-o problemă în care rezultatele se exprimă în distribuţii, putem înlocui — pentru efectuarea calculului — o distribuţie regulată prin funcţia care a generat acea distribuţie, iar o distribuţie singulară printr-un termen al unui şir reprezentativ corespunzător. În felul acesta, formulele obţinute pot fi programate la un calculator electronic, obţinînd aproximaţia dorită, în funcţie de termenul ales al şirului reprezentativ.

O problemă importantă este aceea a găsirii unor criterii, care să ne permită să stabilim dacă un şir de funcţii local integrabile este şir reprezentativ sau nu.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 1.2.2. Dacă $f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *este un şir de funcţii local integrabile, definite în* R^n, *care satisfac condiţiile*

$$\text{a)} \quad \left| \iint \ldots \int_{\Omega} f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n \right| \leqslant M,$$

$$\text{b)} \quad \lim_{k \to \infty} \iint \ldots \int_{\Omega} f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{dacă } O \notin \Omega, \\ 1, & \text{dacă } O \in \Omega, \end{cases}$$

unde M *nu depinde de* k *şi* Ω, *iar* Ω *este un domeniu paralelipipedic oarecare, avînd feţele paralele cu planele de coordonate şi un vîrf în punctul* $A^0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, *cu* $x_1^0 < 0, x_2^0 < 0, \ldots, x_n^0 < 0$, *atunci acest şir este un şir reprezentativ* δ, *verificîndu-se relaţia* (1.2.80).

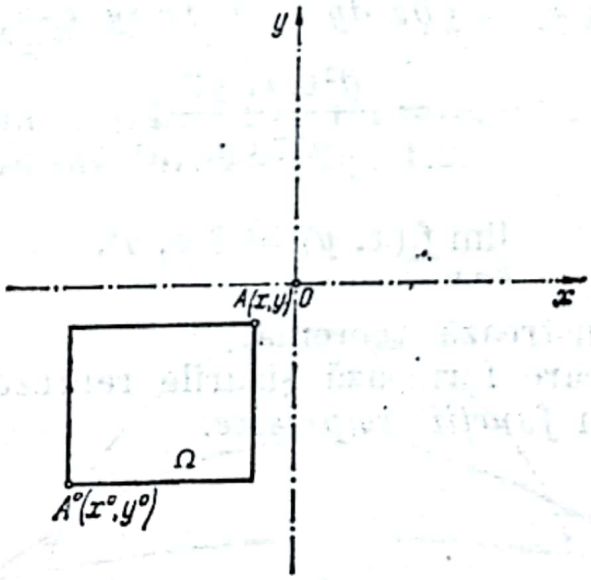


Fig. 1.23.

Pentru demonstraţie ne limităm la un şir $f_k(x, y)$ de funcţii local integrabile; paralelipipedul menţionat în teoremă devine, în R^2, un dreptunghi, pentru care $x^0 < 0, y^0 < 0$ (fig. 1.23). Introducem funcţia

$$F_k(x, y) = \int_{x^0}^{x} \int_{y^0}^{y} f_k(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint_{\Omega} f_k(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y, \quad (1.2.81)$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde deducem

$$\frac{\partial^2 F_k(x, y)}{\partial x \, \partial y} = f_k(x, y), \; k \in N. \qquad (1.2.81')$$

Dacă $x > 0$ și $y > 0$, atunci Ω va cuprinde originea și, conform condiției b), $\lim_{k \to \infty} F_k(x, y) = 1$; dacă însă coordonatele punctului $A(x, y)$ nu sînt simultan pozitive, atunci Ω nu va cuprinde originea și, în baza aceleiași condiții, $\lim_{k \to \infty} F_k(x, y) = 0$. Deoarece $F_k(x, y)$ sînt funcții mărginite, rezultă că

$$\lim_{k \to \infty} F_k(x, y) = \theta(x, y),$$

unde $\theta(x, y)$ este funcția lui Heaviside în R^2. În baza relației (1.2.81'), putem scrie

$$\lim_{k \to \infty} f_k(x, y) = \lim_{k \to \infty} \frac{\partial^2 F_k(x, y)}{\partial x \, \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y} [\lim_{k \to \infty} F_k(x, y)] =$$

$$= \frac{\partial^2 \theta(x, y)}{\partial x \, \partial y};$$

prin urmare

$$\lim_{k \to \infty} f_k(x, y) = \delta(x, y),$$

ceea ce demonstrează teorema.

Funcțiile care formează șirurile reprezentative δ se mai numesc și *funcții impulsive*.

1.2.3.2. Exemple

Șirurile reprezentative δ au fost utilizate în legătură cu integralele Fourier, propagarea căldurii, teoria ondulatorie a luminii, reprezentarea sarcinilor concentrate etc. Astfel, G. R. Kirchhoff, cu ocazia formulării principiului lui Huygens în teoria ondulatorie a luminii, a menționat funcția (fig. 1.24)

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \, e^{-\frac{nx^2}{2}}, \qquad (1.2.82)$$

Scanned with OKEN Scanner

care converge în sens generalizat către $\delta(x)$, adică

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \delta(x). \qquad (1.2.83)$$

Lord Kelvin a utilizat această funcție la reprezentarea surselor de căldură punctiforme, sub forma

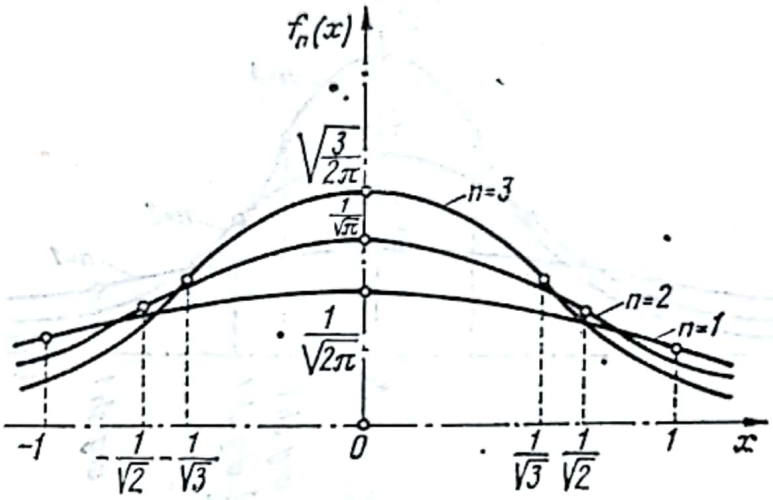


Fig. 1.24.

$$g_k(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}, \; k > 0, \; t > 0.$$

După cum se știe, în teoria integralei Fourier se utilizează *funcția lui Dirichlet* (fig. 1.25)

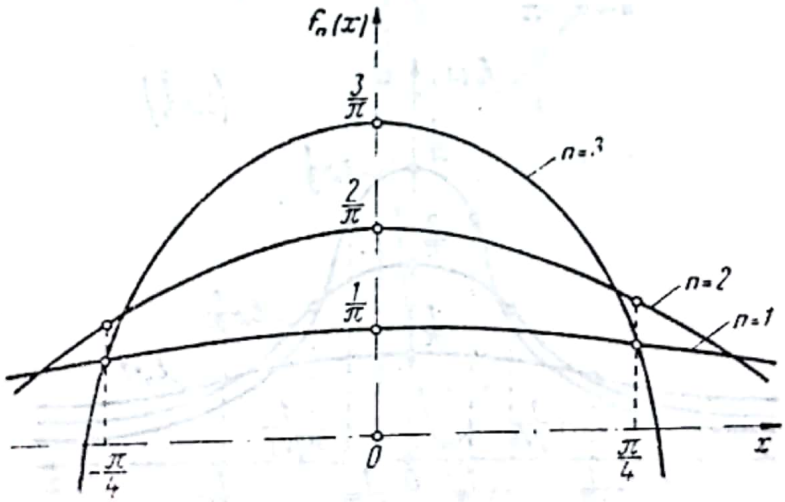


Fig. 1.25.

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{\pi x}, \; 0 < n < \infty, \qquad (1.2.84)$$

pentru care putem scrie, de asemenea, o limită de forma (1.2.83).

Menționăm și *funcția lui Stieltjes* (fig. 1. 26)

$$f_n(x) = \frac{2}{\pi}\,\frac{n}{e^{nx} + e^{-nx}} = \frac{1}{\pi}\,\frac{n}{\operatorname{ch} nx}, \qquad (1.2.85)$$

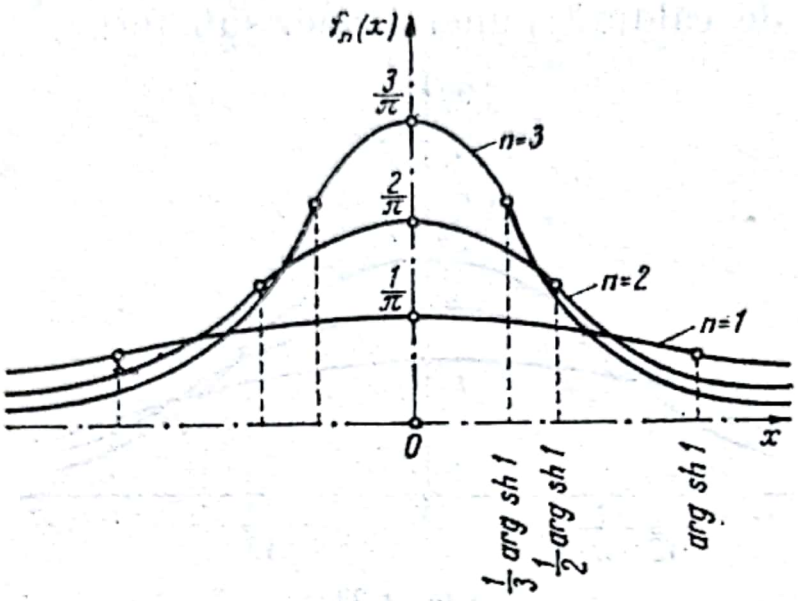


Fig. 1.26.

care este tot o funcție impulsivă. Integrînd în raport cu x și trecînd la limită, putem scrie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} e^{nx} = \theta(x). \qquad (1.2.86)$$

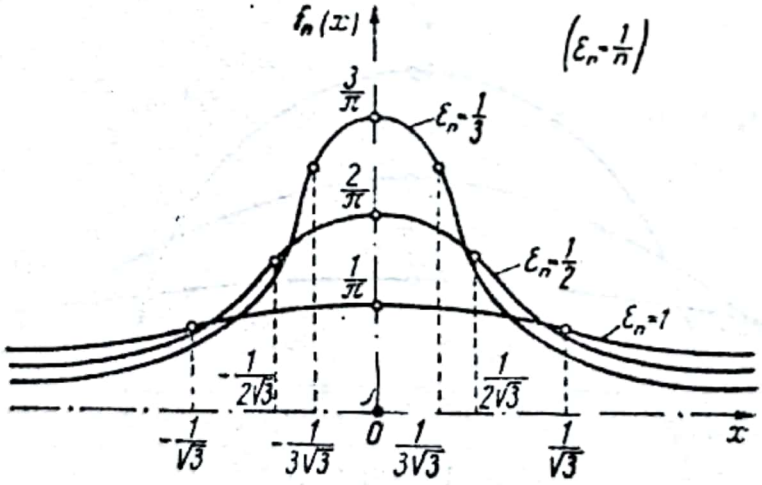


Fig. 1.27.

Funcția lui Cauchy (fig. 1.27)

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\varepsilon_n}{x^2 + \varepsilon_n^2}, \varepsilon_n > 0,\ n \in N_0, \qquad (1.2.87)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde ε_n este un șir de numere pozitive, care tinde către zero, este de asemenea o funcție impulsivă.

Prin derivare în raport cu x, căpătăm (fig. 1.28)

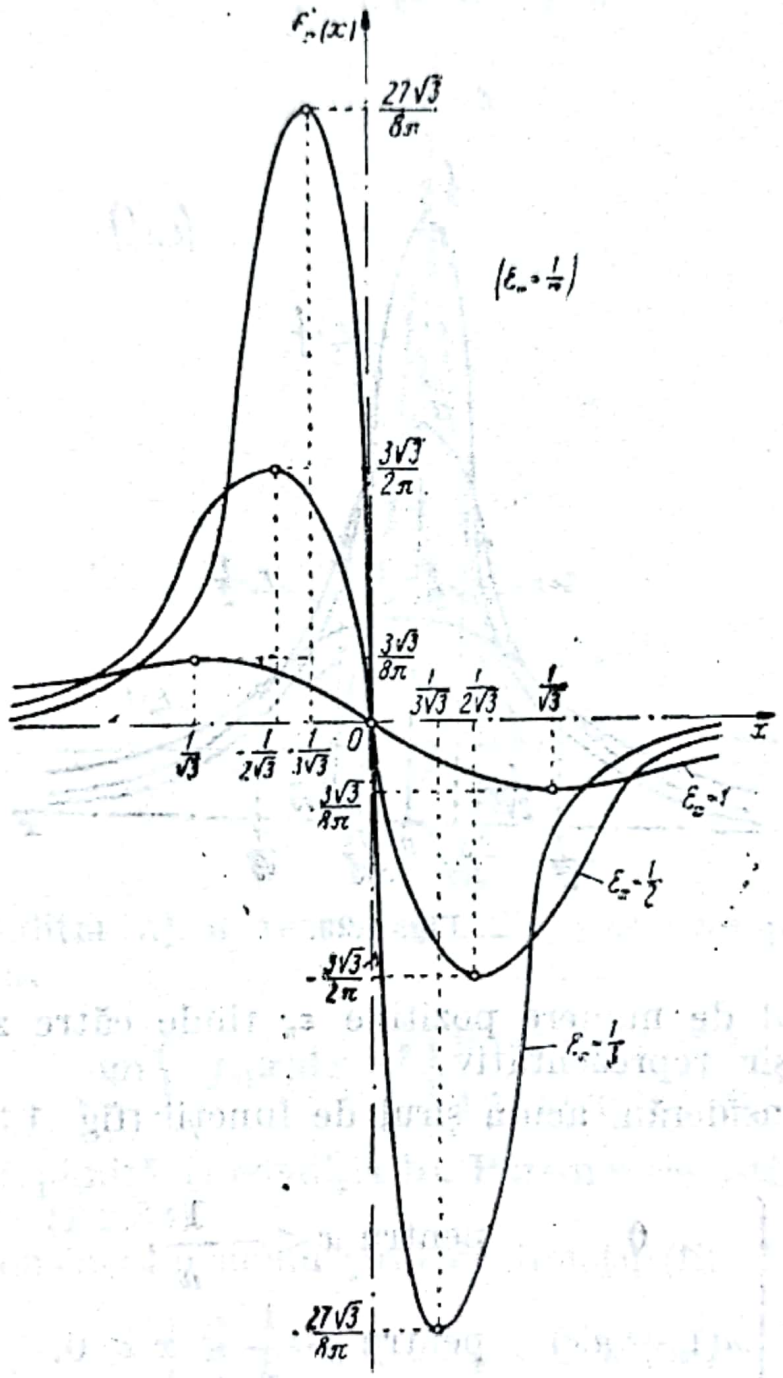


Fig. 1.28.

$$\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{2}{\pi}\,\frac{\varepsilon_n x}{(x^2+\varepsilon_n^2)^2}\right]=\delta'(x), \qquad (1.2.88)$$

deci un șir reprezentativ δ'.

Scanned with OKEN Scanner

În mod analog, șirul de funcții (fig. 1.29)

$$f_n(x) = \frac{2}{\pi} \frac{\varepsilon_n^3}{(x^2 + \varepsilon_n^2)^2}, \varepsilon_n > 0, n \in N_0, \qquad (1.2.89)$$

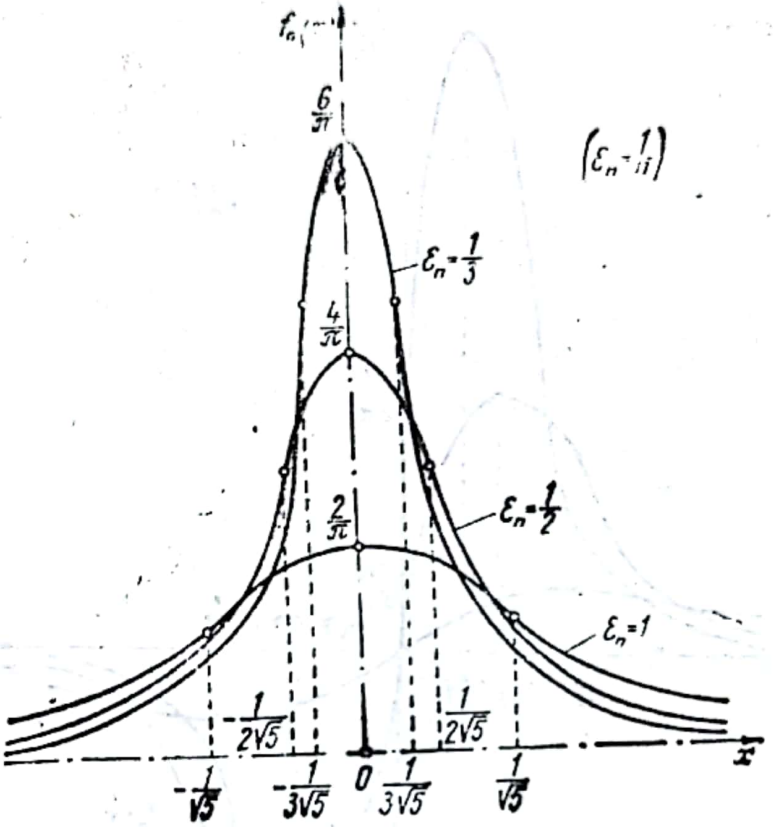


Fig. 1.29.

unde șirul de numere pozitive ε_n tinde către zero, este tot un șir reprezentativ δ.

Să considerăm acum șirul de funcții (fig. 1.30)

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x < -\frac{1}{n}, \\ n(1 + nx) & \text{pentru } -\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 0, \\ n(1 - nx) & \text{pentru } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{pentru } x > \frac{1}{n}; \end{cases} \qquad (1.2.90)$$

Scanned with OKEN Scanner

observăm că aria triunghiului care s-a format este egală cu unitatea, pentru orice $n>0$. În consecință,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) = 1,$$

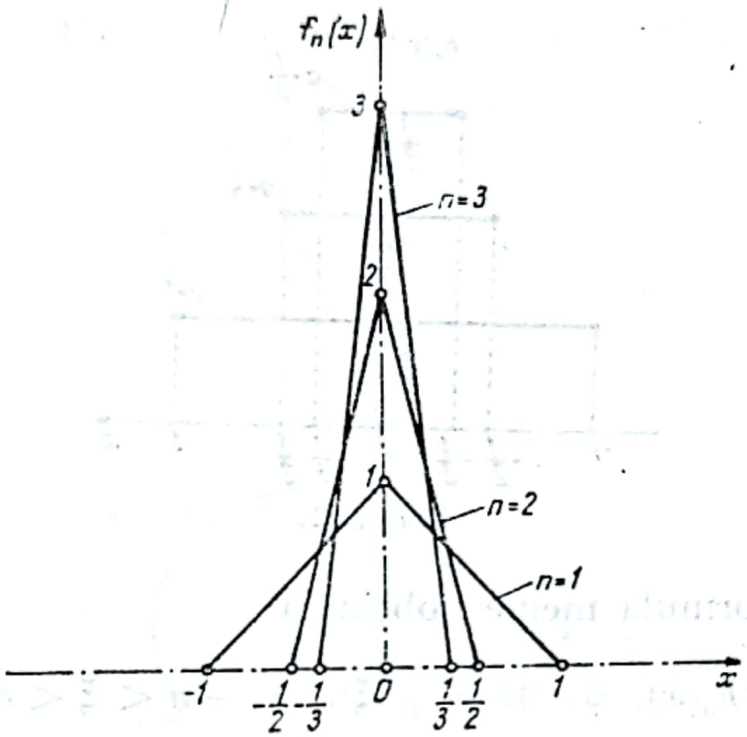


Fig. 1.30.

deci condiția a) a teoremei 1.2.2 este îndeplinită; de asemenea,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{x} f_n(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 \text{ pentru } x<0, \\ 1 \text{ pentru } x>0, \end{cases}$$

fiind îndeplinită și condiția b). Putem scrie astfel o relație de forma (1.2.83).

Să considerăm acum șirul de funcții (fig. 1.31)

$$h_a(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} \text{ pentru } x\in[-a, a],\ a>0, \\ 0 \text{ în rest}; \end{cases} \qquad (1.2.91)$$

folosind teorema 1.2.2, putem demonstra că

$$\lim_{a\to+0} h_a(x) = \delta(x). \qquad (1.2.91')$$

Putem ajunge la acest rezultat și pe altă cale. Într-adevăr, avem

$$(h_a(x),\ \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} h_a(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} \varphi(x)\mathrm{d}x,\ \varphi(x) \in K\ ;$$

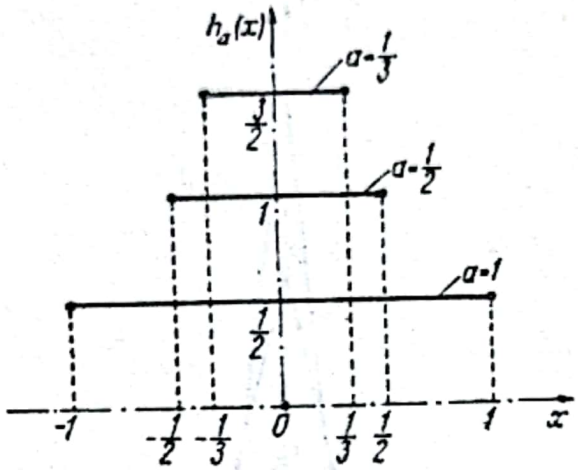


Fig. 1.31.

aplicînd formula mediei, obținem

$$(h_a(x),\ \varphi(x)) = \varphi(\xi), \qquad -a < \xi < a,$$

ceea ce, pentru $a \to +0$, ne conduce la

$$\lim_{a\to+0} (h_a(x),\ \varphi(x)) = \lim_{a\to+0} \varphi(\xi) = \varphi(0) = (\delta(x),\ \varphi(x)),$$

formula (1.2.91′) fiind astfel demonstrată.

În mod analog, putem construi șiruri reprezentative de funcții de aceeași formă, de mai multe variabile; astfel, șirul

$$h_a(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4a^2} \text{ pentru } & (x, y) \in [-a, a] \times [-a, a], \\ 0 \quad \text{în rest} & \end{cases} \tag{1.2.92}$$

ne conduce la

$$\lim_{a\to+0} h_a(x, y) = \delta(x, y),$$

Scanned with OKEN Scanner

iar șirul

$$h_a(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{1}{8a^3} \text{ pentru } (x, y, z) \in [-a, a] \times [-a, a] \times \\ \qquad \times [-a, a], \\ 0 \quad \text{în rest} \end{cases} \tag{1.2.93}$$

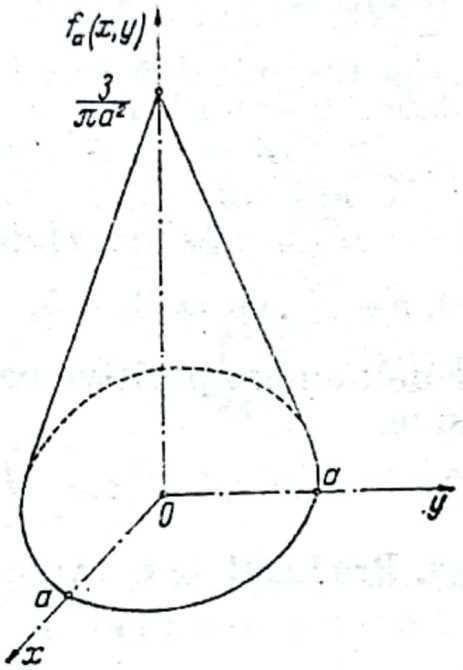


Fig. 1.32.

ne permite să scriem

$$\lim_{a \to +0} h_a(x, y, z) = \delta(x, y, z).$$

De asemenea, fie șirul (fig. 1.32)

$$f_a(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3}{\pi a^3} (a - r) \text{ pentru } 0 \leqslant r \leqslant a,\ a > 0,\ r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ 0 \qquad \text{în rest.} \end{cases} \tag{1.2.94}$$

Deoarece

$$\iint_{R^2} f_a(x, y)\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{3}{\pi a^3} (a - r) r\, dr\, d\theta,$$

rezultă că prima condiție a teoremei 1.2.2 este îndeplinită. Pe de altă parte, pentru domeniul dreptunghiular Ω, care respectă condițiile impuse de această teoremă, avem

$$\lim_{a \to +0} \iint_{\Omega} f_a(x, y)\, dx\, dx = \begin{cases} 1 & \text{pentru } O \notin \Omega, \\ 0 & \text{pentru } O \in \Omega; \end{cases}$$

prin urmare, rezultă că

$$\lim_{a \to +0} f_a(x, y) = \delta(x, y).$$

De asemenea, se poate arăta că funcțiile

$$f_n(x, y, z) = \frac{p-2}{2\pi} \frac{\varepsilon_n^{p-2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{p}{2}}}, \qquad (1.2.95)$$

$$\varepsilon_n > 0, n \in N_0, (p = 3, 4, 5, \ldots),$$

unde ε_n este un șir de numere pozitive ce tinde către zero, sînt funcții impulsive.

1.3. Produsul direct. Produsul de convoluție

1.3.1. *Produsul direct*

1.3.1.1. Rezultate generale

Produsul direct sau *produsul tensorial* a două distribuții este o operație care generalizează produsul dintre două funcții.

Fie R^n și R^m două spații euclidiene de dimensiune n, respectiv m, iar $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in R^m$ puncte ale acestor spații; produsul cartezian al acestor spații este $R^n \times R^m = R^{n+m}$, reprezentînd un nou spațiu euclidian de dimensiune $n + m$. Un punct al acestui spațiu euclidian este $(x, y) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m)$, coordonatele fiind scrise în ordinea dată.

Fie acum funcțiile numerice $f(x)$ și $g(y)$, $x \in R^n$ $y \in R^m$; prin definiție, produsul direct al funcțiilor $f(x)$ și $g(y)$ va fi dat de funcția

$$h(x, y) = f(x) \times g(y) = f(x)g(y), \qquad (1.3.1)$$

Scanned with OKEN Scanner

definită pe R^{n+m}. În acest fel, produsul direct coincide cu produsul obișnuit între funcții, fiind comutativ, asociativ și distributiv în raport cu adunarea funcțiilor definite pe același spațiu.

Dacă, în particular, funcțiile $f(x)$ și $g(y)$ sînt funcții local integrabile pe R^n, respectiv R^m, atunci și produsul lor direct $h(x, y)$ este o funcție local integrabilă pe R^{n+m}.

Pentru a vedea modul în care trebuie să definim produsul direct a două distribuții, astfel încît acesta să constituie o generalizare a produsului direct a două funcții, plecăm de la funcțiile local integrabile $f(x)$ și $g(y)$, pe R^n, respectiv pe R^m. Fie $\varphi(x, y) \in K(R^{n+m})$ o funcție fundamentală, definită pe R^{n+m}; în baza teoremei lui Fubini privind permutabilitatea ordinei de integrare, putem scrie

$$(f(x) \times g(y), \varphi(x, y)) = \int_{R^{n+m}} f(x)\, g(y)\, \varphi(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{R^n} f(x) dx \int_{R^m} g(y) \varphi(x, y) dy = (f(x), (g(y), \varphi(x, y))).$$

În felul acesta, *produsul direct a două distribuții* $f(x) \in K'(R^n)$ și $g(y) \in K'(R^m)$ se definește prin relația

$$(f(x) \times g(y), \varphi(x, y)) = (f(x), (g(y), \varphi(x, y))), \varphi(x, y) \in K(R^{n+m}); \tag{1.3.2}$$

se poate arăta că funcționala definită de produsul direct $f(x) \times g(y)$ este liniară și continuă, reprezentînd astfel o distribuție definită pe spațiul fundamental $K(R^{n+m})$.

Observăm că produsul direct a două distribuții regulate $f(x)$ și $g(y)$ este tot o distribuție regulată, corespunzătoare funcției $f(x)\, g(y)$.

În ceea ce privește suportul distribuției $f(x) \times g(y)$, se poate arăta că el este constituit din produsul cartezian al suporturilor distribuțiilor $f(x)$ și $g(y)$, adică

$$\operatorname{supp} [f(x) \times g(y)] = [\operatorname{supp} f(x)] \times [\operatorname{supp} f(y)]. \tag{1.3.3}$$

Folosind teorema 1.3.3, se poate demonstra, cu ușurință, proprietatea de *comutativitate* a produsului direct; putem scrie

$$f(x) \times g(y) = g(y) \times f(x). \tag{1.3.4}$$

Scanned with OKEN Scanner

În acest caz, produsul direct se poate defini și sub forma

$$(f(x)\times g(y),\ \varphi(x,y))=(g(y),(f(x),\ \varphi\ (x,y))),\ \varphi(x,y)\in K(R^{n+m}). \tag{1.3.2'}$$

De asemenea, are loc proprietatea de *asociativitate*

$$f(x)\times[g(y)\times h(z)]=[f(x)\times g(y)]\times h(z), \tag{1.3.5}$$

unde $f(x)\in K'(R^n)$, $g(y)\in K'(R^m)$, $h(z)\in K'(R^p)$, ce se poate demonstra în mod analog.

Distributivitatea produsului direct față de adunarea distribuțiilor ce aparțin aceluiași spațiu este evidentă. Fie astfel $f(x)\in K'(R^n)$, $g_1(y), g_2(y)\in K'(R^m)$ și $\alpha, \beta\in R$; vom putea scrie relația

$$f(x)\times[\alpha g_1(y)+\beta g_2(y)]=\alpha f(x)\times g_1(y)+\beta f(x)\times g_2(y). \tag{1.3.6}$$

1.3.1.2. Proprietăți. Exemple

Dacă D_x^p și D_y^q sînt operatori diferențiali în raport cu variabila x, respectiv y, atunci are loc relația

$$D_x^pD_y^q[f(x)\times g(y)]=(D_x^pf(x))\times(D_y^qg(y)). \tag{1.3.7}$$

Într-adevăr, pentru o funcție fundamentală $\varphi(x, y)\in K(R^{n+m})$ putem scrie

$$(D_x^p[f(x)\times g(y)],\ \varphi(x,y))=(-1)^p(f(x)\times g(y),D_x^p\varphi(x,y))=$$

$$=(-1)^p(g(y),(f(x),D_x^p\ \varphi(x,y)))=(g(y),(D_x^pf(x),\varphi(x,y)))=$$

$$=(D_x^pf(x)\times g\ (y),\ \varphi(x,y)),$$

ceea ce conduce, după ce se aplică și operatorul D_y^q, la relația menționată.

O proprietate similară se referă la înmulțirea produsului direct cu o funcție indefinit derivabilă de forma $a(x)\,b(y)$. Astfel, dacă $a(x)\in C^\infty(R^n)$ și $b(y)\in C^\infty(R^m)$, iar $f(x)\in K'(R^n)$ și $g(y)\in K'(R^m)$, are loc relația

$$a(x)\,b(y)\,[f(x)\times g(y)]=(a(x)\,f(x))\times(b(y)\,g(y)), \tag{1.3.8}$$

Scanned with OKEN Scanner

care se demonstrează pe aceeași cale. În cazul altor spații fundamentale, ținînd seama de condițiile în care se poate defini produsul dintre o funcție și distribuțiile corespunzătoare acestor spații, se obține un rezultat analog.

Dacă funcția $f(x)$ este definită pe R^n, iar funcția $1(y)$ pe R^m, avem

$$f(x) \times 1(y) = f(x), \tag{1.3.9}$$

acest produs direct nedepinzînd deci de variabila y; pentru distribuții are loc o proprietate similară.

Distribuția lui Heaviside $\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, definită pe R^n, poate fi scrisă, cu ajutorul produsului direct, sub forma

$$\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \theta(x_1) \times \theta(x_2) \times \ldots \times \theta(x_n) = \\ = \theta(x_1)\,\theta(x_2) \ldots \theta(x_n); \tag{1.3.10}$$

suportul ei fiind

$$\text{supp}\ \theta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{supp}\ \theta(x_1) \times \text{supp}\ \theta(x_2) \times \ldots \\ \ldots \times \text{supp}\ \theta(x_n) = [0, \infty) \times [0, \infty) \times \ldots \times [0, \infty). \tag{1.3.11}$$

Observînd că

$$\frac{\partial^n \theta(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1\, \partial x_2 \ldots\, \partial x_n} = \delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = \frac{\partial\, \theta(x_1)}{\partial x_1} \times \frac{\partial\, \theta(x_2)}{\partial x_2} \times \ldots \times \frac{\partial\, \theta(x_n)}{\partial x_n},$$

rezultă

$$\delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \delta(x_1) \times \delta(x_2) \times \ldots \times \delta(x_n). \tag{1.3.12}$$

Cu ajutorul produsului direct, expresia $\frac{\partial}{\partial y}\theta(x, y)$ se scrie

$$\frac{\partial}{\partial y}\theta(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\,[\theta(x) \times \theta(y)] = \theta(x) \times \frac{\partial\, \theta(y)}{\partial y} = \theta(x) \times \delta(y); \tag{1.3.13}$$

Scanned with OKEN Scanner

pentru $\varphi(x, y) \in K(R^2)$ obținem

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\theta(x, y),\ \varphi(x, y)\right) = (\theta(x) \times \delta(y),\ \varphi(x, y)) =$$

$$= (\theta(x),\ (\delta(y),\ \varphi(x,\ y))) = (\theta(x),\ \varphi(x, 0)),$$

astfel încît

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}(\theta x,\ y),\ \varphi(x, y)\right) = \int_0^\infty \varphi(x,\ 0)\, dx.$$

Folosind formula (1.2.57), putem scrie

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\theta(x, y),\ \varphi(x, y)\right) = \left(\frac{\tilde{\partial}}{\partial y}\ \theta(x, y),\ \varphi(x,\ y)\right) +$$

$$+ \int_{y=0} s_y\ \varphi(x,\ y)\ dx;$$

observînd că $s_y = 1$, pentru curba de discontinuitate $y = 0$ și $\frac{\tilde{\partial}}{\partial y}\ \theta(x, y) = 0$, obținem aceeași relație (1.3.13′).

1.3.2. *Produsul de convoluție*

1.3.2.1. Rezultate generale

Produsul de convoluție este un produs de o natură diferită, în comparație cu produsul direct.

Dacă $f(x)$ și $g(x)$ sînt funcții local integrabile pe R^n, atunci *produsul* lor *de convoluție* se definește astfel:

$$f(x) * g(x) = \int_{R^n} f(t)\, g(x - t)\, dt = \int_{R^n} g(t)\, f(x - t)\, dt \tag{1.3.14}$$

și reprezintă o nouă funcție, de variabilă $x \in R^n$, local integrabilă, dacă integrala există. Egalitatea celor două integrale se verifică ușor, considerînd de exemplu substituția $z = x - t$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă, în particular, funcţiile $f(x)$ şi $g(x)$ sînt continue, atunci şi produsul lor de convoluţie este o funcţie continuă.

Pentru ca produsul de convoluţie a două funcţii să existe trebuie să fie satisfăcută, de exemplu, una dintre următoarele condiţii :

a) funcţia $f(x)$ este integrabilă pe R^n, iar funcţia $g(x)$ este mărginită în R^n (sau integrabilă pe R^n) ; în acest caz, produsul de convoluţie va fi o funcţie continuă, mărginită în R^n, putînd scrie o relaţie de evaluare a acestui produs, sub forma

$$|f(x) * g(x)| \leqslant \int_{R^n} |f(x)|\, dx \sup_{x \in R^n} |g(x)| ; \qquad (1.3.15)$$

b) suporturile funcţiilor $f(x)$ şi $g(x)$, $x \in R$, sînt situate pe intervalul $[0, \infty)$; în acest caz, produsul de convoluţie va avea expresia

$$f(x) * g(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x \leqslant 0, \\ \int_0^x f(t)\, g(x-t)\, dt & \\ & \text{pentru } x \geqslant 0, \end{cases} \qquad (1.3.16)$$

suportul său fiind situat pe intervalul $[0, \infty)$;

c) funcţiile $f(x)$ şi $g(x)$ au suport compact.

Pentru a extinde produsul de convoluţie în cazul distribuţiilor, vom pleca de la funcţiile local integrabile $f(x)$ şi $g(x)$, definite pe R^n, admiţînd că produsul lor de convoluţie, definit de formula (1.3.14), există. Fie $\varphi(x) \in K(R^n)$ o funcţie fundamentală ; putem scrie

$$(f(x) * g(x),\ \varphi(x)) = \int_{R^n} \left[\int_{R^n} f(\xi)\, g(x-\xi)\, d\xi \right] \varphi(x)\, dx =$$

$$= \iint_{R^{2n}} f(\xi)\, g(\eta)\, \varphi(\xi+\eta)\, d\xi\, d\eta,$$

unde am efectuat schimbarea de variabilă $x - \xi = \eta$. Evident, produsul $f(\xi)\, g(\eta)$ poate fi considerat ca fiind produsul direct $f(\xi) \times g(\eta)$, astfel încît

$$(f(x) * g(x),\ \varphi(x)) = (f(x) \times g(y),\ \varphi(x+y)) =$$

$$= (f(x),\ (g(y),\ \varphi(x+y))) = (g(y),\ (f(x),\ \varphi(x+y))). \qquad (1.3.17)$$

Scanned with OKEN Scanner

Vom considera relaţia (1.3.17) drept formulă de definiţie pentru *produsul de convoluţie al distribuţiilor* $f(x), g(x) \in K'(R^n)$; după cum se vede, acest produs se defineşte cu ajutorul produsului direct, funcţia fundamentală fiind $\varphi(x+y)$.

Se poate arăta că produsul de convoluţie a două distribuţii, definit prin relaţia (1.3.17), are sens, dacă este îndeplinită, de exemplu, una dintre următoarele condiţii:

a) cel puţin una dintre distribuţiile $f(x)$ şi $g(x)$ are suport compact;

b) ambele distribuţii $f(x)$ şi $g(x)$ au suporturile mărginite în aceeaşi parte [de exemplu, $f(x) = 0$ pentru $x < a$ şi $g(x) = 0$ pentru $x < b$, suporturile celor două distribuţii fiind astfel mărginite la stînga].

În general, se poate arăta că suportul produsului de convoluţie al distribuţiilor $f(x)$ şi $g(x)$ este cuprins în închiderea sumei suporturilor celor două distribuţii.

Folosind proprietatea de comutativitate şi proprietatea de asociativitate a produsului direct, se poate arăta că aceste proprietăţi au loc şi pentru produsul de convoluţie; astfel, dacă $f(x)$, $g(x)$, $h(x) \in K'(R^n)$, putem scrie

$$\begin{aligned} f(x)*g(x) &= g(x)*f(x), \\ [f(x)*g(x)]*h(x) &= f(x)*[g(x)*h(x)]. \end{aligned} \tag{1.3.18}$$

Produsul de convoluţie este, de asemenea, distributiv faţă de adunarea distribuţiilor, adică

$$\begin{aligned} f(x)*[\alpha g_1(x) + \beta g_2(x)] &= \alpha[f(x)*g_1(x)] + \\ &+ \beta[f(x)*g_2(x)], \quad \alpha, \beta \in R. \end{aligned} \tag{1.3.19}$$

Dacă D^p reprezintă un operator diferenţial, atunci putem scrie

$$D^p(f(x)*g(x)) = D^p f(x)*g(x) = f(x)*D^p g(x); \tag{1.3.20}$$

într-adevăr, pentru $\varphi(x) \in K(R^n)$, avem

$$\begin{aligned} (D^p(f(x)*g(x)),\ \varphi(x)) &= (-1)^p (f(x)*g(x), D^p\varphi(x)) = \\ &= (-1)^p (f(x) \times g(y), D^p \varphi(x+y)) = \\ =(-1)^p(f(x),(g(y),D^p\varphi(x+y)))&=(f(x),(D^p g(y),\varphi(x+y)))= \\ &= (f(x) \times D^p g(y), \varphi(x+y)) = (f(x)*D^p g(x), \varphi(x)), \end{aligned}$$

de unde rezultă relaţia (1.3.20).

Scanned with OKEN Scanner

În aplicații apar adesea distribuții ce depind de un parametru.

Teorema 1.3.1. *Dacă* $f_t(x)$ *este o distribuție care depinde de parametrul* t *și dacă* $\dfrac{\partial f_t(x)}{\partial t}$ *există, atunci*

$$\frac{\partial}{\partial t}(f_t(x)*g(x)) = \frac{\partial f_t(x)}{\partial t}*g(x), \tag{1.3.21}$$

în cazul în care este verificată una dintre condițiile :

a) *distribuțiile* $f_t(x)$ *sînt concentrate pe o aceeași mulțime mărginită ;*

b) *distribuția* $g(x)$ *este concentrată pe o mulțime mărginită ;*

c) *suporturile distribuțiilor* $f_t(x)$ *și* $g(x)$ *sînt mărginite în aceeași parte de o constantă ce nu depinde de* t.

În particular, dacă șirul de distribuții $f_k(x)$ tinde către $f(x)$, pentru $k \to \infty$, și dacă una dintre condițiile enumerate relativ la distribuțiile $f_k(x)$ și $g(x)$ este îndeplinită, atunci

$$\lim_{k\to\infty}(f_k(x)*g(x)) = f(x)*g(x). \tag{1.3.22}$$

1.3.2.2. Exemple

Distribuția $\delta(x)$ joacă rol de *unitate* în raport cu produsul de convoluție, deoarece

$$\delta(x)*f(x) = f(x),\ x \in R^n. \tag{1.3.23}$$

Într-adevăr, condiția a) privind existența produsului de convoluție este îndeplinită, deoarece suportul lui $\delta(x)$ este un punct ; în acest caz, putem scrie

$$(\delta(x)*f(x),\ \varphi(x)) = (\delta(x) \times f(y), \varphi(x+y)) =$$

$$= (f(y), (\delta(x), \varphi(x+y))) = (f(y), \varphi(y)) = (f(x), \varphi(x)),$$

de unde rezultă relația (1.3.23).

Scanned with OKEN Scanner

În acest caz, dacă $f_k(x)$ este un șir reprezentativ δ, rezultă

$$\lim_{k\to\infty} (f_k(x)*g(x)) = g(x).$$

În mod analog, se poate arăta că

$$\delta(x - x_0)*f(x) = f(x - x_0), \qquad x, x_0 \in R^n;$$

în particular,

$$\delta(x - a)*\delta(x - b) = \delta(x - a - b), \qquad x, a, b \in R^n.$$

De asemenea, putem scrie

$$\mathrm{D}^p [\delta(x)*f(x)] = \mathrm{D}^p \delta(x)*f(x) = \mathrm{D}^p f(x). \qquad (1.3.24)$$

Să calculăm acum produsul $\theta(x - a)*\theta(x - b)$, $0 \leqslant a \leqslant b$; suporturile funcțiilor $\theta(x - a)$ și $\theta(x - b)$ vor fi $[a, \infty)$, respectiv $[b, \infty)$, fiind situate în intervalul $[0, \infty)$. Aplicînd, în acest caz, formula (1.3.16), obținem

$$\theta(x - a)*\theta(x - b) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x \leqslant a, \\ \int_a^x \theta(t-a)\,\theta(x-t-b)\,dt & \text{pentru } x \geqslant a; \end{cases} \qquad (1.3.25)$$

observînd că

$$\int_a^x \theta(t - a)\,\theta(x - t - b)\,dt = \int_a^x \theta(x - t - b)\,dt =$$

$$= -\int_{x-a-b}^{-b} \theta(u)\,du = \int_0^{x-a-b} \theta(u)\,du = x-a-b,\ x \geqslant a + b,$$

căpătăm (fig. 1.33)

$$\theta(x - a)*\theta(x - b) = (x - a - b)_+ =$$

$$= (x-a-b)\,\theta(x-a-b) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x < a + b, \\ x-a-b & \text{pentru } x \geqslant a + b. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

În general, fiind dată funcţia $f(x)$, partea pozitivă a acestei funcţii va fi definită sub forma (fig. 1.34)

$$f_+(x) = \theta(x) f(x). \tag{1.3.26}$$

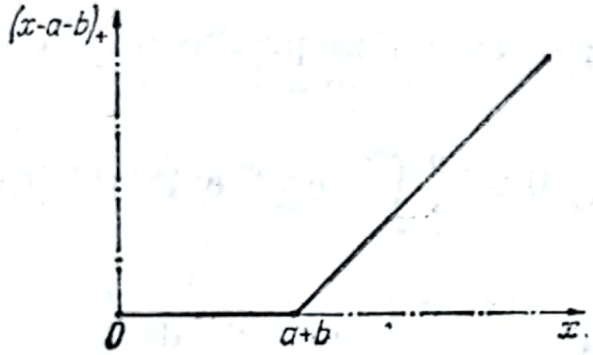


Fig. 1.33.

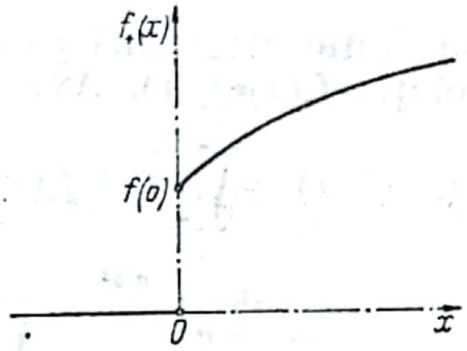


Fig. 1.34.

Pentru $a = b = 0$, obţinem

$$\theta(x) * \theta(x) = x_+ = x\theta(x) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } x < 0, \\ x \text{ pentru } x \geqslant 0. \end{cases} \tag{1.3.27}$$

În mod analog, putem scrie

$$\theta(x) * x_+^n = \frac{1}{n+1} x_+^{n+1}; \tag{1.3.28}$$

în particular

$$\theta(x) * x_+ = \frac{1}{2} x_+^2.$$

Vom avea, de asemenea,

$$\theta(x) \sin x * \theta(x) \cos x = \frac{1}{2} x_+ \sin x, \tag{1.3.29}$$

$$\theta(x) \sin x * \theta(x) \sin x = \frac{1}{2} [\theta(x) \sin x - x_+ \cos x], \tag{1.3.29'}$$

$$\theta(x) \cos x * \theta(x) \cos x = \frac{1}{2} [\theta(x) \sin x + x_+ \cos x]. \tag{1.3.29''}$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie acum funcţia

$$_a(x) = \frac{a}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2x^2}, \; a > 0, \tag{1.3.30}$$

care este integrabilă pe R; să calculăm produsul de convoluţie $f_a(x)*f_b(x)$. Avem

$$f_a(x)*f_b(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_a(t)\, f_b(x-t)\, dt = \frac{ab}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2t^2} e^{-b^2(x-t)^2}\, dt =$$

$$= \frac{ab}{\pi} e^{-\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{a^2+b^2}\, t - \frac{b^2x}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2} dt;$$

făcînd substituţia

$$u = \sqrt{a^2+b^2}\, t - \frac{b^2x}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

şi ţinînd seama de integrala lui Poisson

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}, \tag{1.3.31}$$

obţinem

$$f_a(x)*f_b(x) = f_c(x), \qquad c = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{1.3.32}$$

Menţionăm că funcţia (1.3.30) corespunde unui şir reprezentativ δ, definit prin formula (1.2.82).

Fie, de asemenea, funcţia

$$f_a(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2+x^2}, \; a > 0, \tag{1.3.33}$$

corespunzătoare şirului reprezentativ, definit de formula (1.2.87). Observăm că această funcţie are drept suport axa reală, fiind în acelaşi timp mărginită, deoarece

$$|f_a(x)| < \frac{1}{\pi a};$$

Scanned with OKEN Scanner

în acest caz, produsul de convoluţie are sens, putînd scrie o relaţie de forma (1.3.32), cu $c = a + b$.

1.4. Distribuţii concentrate pe curbe, suprafeţe şi volume. Distribuţii omogene

1.4.1. *Distribuţii concentrate pe curbe, suprafeţe şi volume*

1.4.1.1. Rezultate generale

Dacă o distribuţie $f(x)$ are suportul conţinut într-o mulţime A (supp $f \subset A$), atunci spunem că distribuţia $f(x)$ este *concentrată pe mulţimea* A. Astfel, distribuţia lui Dirac $\delta(x)$ şi distribuţia lui Heaviside $\theta(x)$ sînt distribuţii concentrate în origine, respectiv pe semiaxa $[0, \infty)$.

O metodă generală de prezentare a acestor distribuţii se bazează pe introducerea unei forme diferenţiale corespunzătoare unei *hipersuprafeţe* (cu $n - 1$ dimensiuni) din spaţiul R^n. În scopul simplificării calculului, vom adopta însă o cale mai simplă, susceptibilă de interpretări fizice importante.

Fie Γ o curbă netedă pe porţiuni din R^3, iar $\rho(x, y, z)$ densitatea liniară a masei distribuite pe curba Γ. Notînd cu ds elementul de arc şi cu dm elementul de masă, densitatea liniară $\rho(x, y, z)$ este dată de expresia

$$\rho(x, y, z) = \frac{dm}{ds}. \tag{1.4.1}$$

Masa totală distribuită pe curba Γ va fi

$$M = \int_\Gamma dm = \int_\Gamma \rho \, ds. \tag{1.4.2}$$

În legătură cu această masă totală M, vom introduce distribuţia $f(x, y, z)$, definită de relaţia

$$(f(x, y, z), \varphi(x, y, z)) = \int_\Gamma f(x, y, z) \, \varphi(x, y, z) \, ds, \tag{1.4.3}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\varphi(x, y, z) \in K(R^3)$. Distribuția $f(x, y, z)$ este o *distribuție concentrată pe curba* Γ, deoarece, pentru orice funcție fundamentală $\varphi(x, y, z) \in K(R^3)$ al cărei suport nu conține puncte din Γ, distribuția $f(x, y, z)$ este nulă. În particular, dacă considerăm $f(x, y, z) = \rho(x, y, z) = 1$ pe curba Γ, atunci obținem o nouă distribuție concentrată pe curba Γ, pe care o notăm, în mod simbolic, $\delta(\Gamma)$. Din punct de vedere fizic, distribuția $\delta(\Gamma)$ corespunde unei mase distribuite pe curba Γ, avînd densitatea egală cu unitatea; ea este analogul distribuției lui Dirac $\delta(x, y, z)$, care din punct ve devere fizic exprimă densitatea unei mase egale cu unitatea, concentrate în origine. Astfel, distribuția $\delta(\Gamma)$ va fi numită *distribuția lui Dirac concentrată pe curba* Γ. Această distribuție va fi formal definită prin formula

$$(\delta(\Gamma),\ \varphi(x, y, z)) = \iiint_{R^3} \delta(\Gamma)\ \varphi(x, y, z)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ dz =$$

$$= \int_{\Gamma} \varphi(x, y, z)\ \mathrm{d}s\ ; \qquad (1.4.4)$$

proprietatea sa esențială constă în faptul că pentru puncte $(x, y, z) \notin \Gamma$ avem $\delta(\Gamma) = 0$.

Analog, dacă S este o hipersuprafață netedă pe porțiuni cu $n - 1$ dimensiuni, din R^n, iar $\mathrm{d}S$ este elementul de arie, atunci distribuția lui Dirac *concentrată pe hipersuprafața* S va fi notată $\delta(S)$ și va fi definită prin

$$(\delta(S),\ \varphi(x)) = \int_S \varphi(x)\ \mathrm{d}S, \quad \varphi(x) \in K(R^n),\ x \in R^n. \qquad (1.4.5)$$

Dacă V este un domeniu din R^n, atunci distribuția $\delta(V)$, *concentrată pe domeniul* V, se definește prin

$$(\delta(V),\ \varphi(x)) = \int_V \varphi(x)\ \mathrm{d}V, \qquad (1.4.6)$$

unde $\varphi(x) \in K(R^n)$, iar $\mathrm{d}V$ este elementul de volum.

Scanned with OKEN Scanner

Distribuții $f(x)$ oarecare, concentrate pe hipersuprafața S sau pe volumul V, pot fi introduse prin formule similare, de forma

$$(f(x,y,z),\ \varphi(x,y,z)) = \int_S f(x,y,z)\ \varphi(x,y,z)\ \mathrm{d}S,$$

$$(f(x,y,z),\ \varphi(x,y,z)) = \int_V f(x,y,z)\ \varphi(x,y,z)\ \mathrm{d}V.$$

În particular, în cazul $n = 3$, obținem distribuții concentrate pe suprafața S, respectiv pe volumul V, din spațiul R^3.

Este important să observăm că unele mărimi fizice acționează asupra unor funcții care nu aparțin totdeauna spațiului fundamental K. Astfel, distribuția $f = \rho\delta(\Gamma)$, definită prin relația (1.4.3), este strîns legată de masa totală M distribuită pe curba Γ, expresia acesteia fiind dată de formula (1.4.2). Pentru ca și relația (1.4.3) să ne dea masa totală, distribuită pe curba Γ, este necesar să admitem $\varphi = 1$, această funcție neaparținînd spațiului fundamental K, deoarece nu are suport compact; rezultă

$$(\rho\delta(\Gamma), 1) = \int_\Gamma \rho\,\mathrm{d}s = M. \qquad (1.4.7)$$

Să considerăm acum distribuția $x\,\rho\delta(\Gamma)$, unde $\rho(x,y,z)$ este o funcție continuă. Notînd cu $\varphi(x,y,z) \in K$ o funcție fundamentală, putem scrie

$$(x\rho\delta(\Gamma),\ \varphi) = (\delta(\Gamma),\ x\rho\varphi) = \int_\Gamma x\rho\varphi\ \mathrm{d}s. \qquad (1.4.8)$$

Evident, distribuția considerată este tot o distribuție concentrată pe curba Γ. Pentru a pune în evidență semnificația ei fizică, este suficient să considerăm abscisa centrului de masă al curbei Γ,

$$x_c = \frac{\int_\Gamma x\rho\,\mathrm{d}s}{\int_\Gamma \rho\,\mathrm{d}s}. \qquad (1.4.9)$$

Scanned with OKEN Scanner

Numărătorul

$$S_{Oyz} = \int_{\Gamma} x\rho \, ds \tag{1.4.10}$$

reprezintă momentul static al curbei Γ, în raport cu planul Oyz, numitorul fiind masa totală distribuită pe curba Γ.

Comparînd expresia (1.4.10) a momentului static S_{Oyz} cu expresia (1.4.8), observăm că, pentru $\varphi = 1$, putem scrie

$$(x\rho\delta(\Gamma), 1) = \int_{\Gamma} x\rho \, ds = S_{Oyz}. \tag{1.4.11}$$

De aici rezultă că momentul static al curbei Γ față de planul Oyz este pe deplin caracterizat de distribuția $x\rho\delta(\Gamma)$ pe care o numim distribuția momentului static al curbei Γ față de planul Oyz. Dacă notăm

$$x\rho\delta(\Gamma) = S_x(\Gamma), \tag{1.4.12}$$

rezultă

$$(S_x(\Gamma), 1) = S_{Oyz};$$

în mod analog, se pot introduce distribuțiile corespunzătoare momentelor statice ale curbei Γ față de celelalte două plane de coordonate.

Considerații similare se pot face și în ceea ce privește momentele de inerție sau momentele de un ordin oarecare. Aceste exemple pun în evidență faptul că la anumite mărimi fizice pot corespunde funcționale, care sînt definite pe spații mai largi decît spațiul K.

O proprietate importantă a distribuțiilor lui Dirac este *proprietatea de aditivitate*. Astfel, dacă hipersuprafața $S = S_1 \cup S_2$, atunci

$$\delta(S) = \delta(S_1) + \delta(S_2). \tag{1.4.13}$$

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, pentru $\varphi(x) \in K(R^n)$, avem

$$(\delta(S), \varphi) = \int_S \varphi \, dS = \int_{S_1} \varphi \, dS_1 + \int_{S_2} \varphi \, dS_2 =$$

$$= (\delta(S_1), \varphi) + (\delta(S_2), \varphi),$$

ceea ce ne conduce la relaţia menţionată.

Fie acum $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ ecuaţia unei hipersuprafeţe S din R^n, astfel încît $P \in C^\infty$; în acest caz,

$$P\delta(S) = 0, \tag{1.4.14}$$

deoarece

$$(P\delta(S), \varphi) = (\delta(S), P\varphi) = \int_S P\varphi \, dS = 0,$$

funcţia $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ fiind nulă pentru orice $x \in S$.

1.4.1.2. Formule de derivare

Distribuţiile lui Dirac $\delta(\Gamma)$ şi $\delta(S)$ sînt deosebit de utile pentru calculul derivatelor parţiale ale distribuţiilor generate de funcţii cu discontinuităţi de speţa întîi.

Vom considera astfel formula (1.2.57), stabilită pentru funcţiile $f(x, y)$ de clasa C^1 pe R^2, avînd discontinuităţi de speţa întîi la traversarea curbei Γ. Introducînd unghiul format de normala n la curbă, orientată în sensul traversării curbei Γ, şi axa Oy, putem scrie $dx = ds \cos(n, y)$; în felul acesta, integrala din membrul al doilea al formulei (1.2.57) devine

$$\int_\Gamma s_y \varphi(x, y) \, dx = \int_\Gamma s_y \varphi(x, y) \cos(n, y) \, ds =$$

$$= (s_y \cos(n, y) \, \delta(\Gamma), \varphi(x, y)),$$

aşa încît formula respectivă capătă forma

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\tilde{\partial}}{\partial y} f(x, y) + s_y \cos(n, y) \, \delta(\Gamma). \tag{1.4.15}$$

Scanned with OKEN Scanner

Obţinem, de asemenea,

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\tilde{\partial}}{\partial x} f(x, y) + s_x \cos(n, x)\ \delta(\Gamma).$$

Formula (1.2.58′) se transcrie în mod analog.

În general, dacă $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este o funcţie de clasa C^1 peste tot în R^n, cu excepţia hipersuprafeţei S cu $n-1$ dimensiuni, unde funcţia are o discontinuitate de speţa întîi, putem scrie

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\tilde{\partial} f}{\partial x_i} + s_i \cos(n, x_i)\ \delta(S), \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (1.4.16)$$

unde $\delta(S)$ reprezintă distribuţia lui Dirac concentrată pe hipersuprafaţa S, s_i este saltul funcţiei la traversarea acestei hipersuprafeţe în direcţia pozitivă a axei Ox_i, iar $\cos(n, x_i)$ este cosinusul unghiului format de axa Ox_i cu normala la hipersuprafaţă, orientată în sensul traversării acesteia.

Pentru distribuţia lui Dirac concentrată pe o curbă sau pe o suprafaţă se pot stabili formule analoage cu formulele (1.2.35)—(1.2.37).

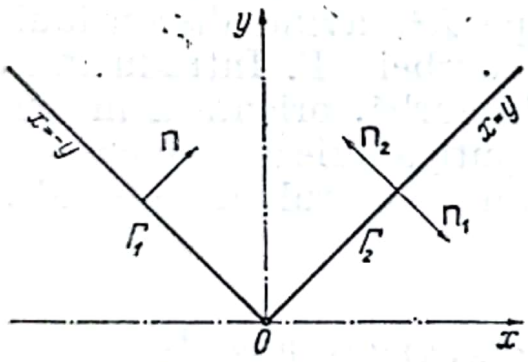


Fig. 1.35.

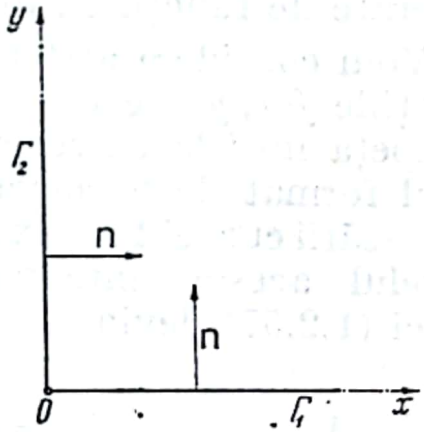


Fig. 1.36.

1.4.1.3. Exemple

Fie funcţia (fig. 1.35)

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } |x| \leqslant y, y > 0, \\ 0 \text{ în rest.} \end{cases} \qquad (1.4.17)$$

Scanned with OKEN Scanner

Curba ce delimitează domeniul în care funcţia are o valoare diferită de zero se compune din ramurile Γ_1 şi Γ_2 ($\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$), definite prin ecuaţiile

$$\begin{aligned} &(\Gamma_1)\ x = -y,\ x \leqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ &(\Gamma_2)\ x = y,\quad x \geqslant 0,\ y \geqslant 0; \end{aligned} \tag{1.4.18}$$

aceasta este curba de discontinuitate corespunzătoare funcţiei $f(x, y)$. Derivatele în sens obişnuit, acolo unde există, vor fi $\frac{\tilde{\partial} f}{\partial x} = 0, \frac{\tilde{\partial} f}{\partial y} = 0$. Pentru derivarea în raport cu x, obţinem $s_x|_{\Gamma_1} = 1$, $s_x|_{\Gamma_2} = -1$, precum şi $\cos(n, x)|_{\Gamma_1} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(n_1, x)|_{\Gamma_2} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, deci

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\sqrt{2}}{2}[\delta(\Gamma_1) - \delta(\Gamma_2)]; \tag{1.4.19}$$

în mod analog, pentru derivarea în raport cu y, găsim $s_y|_{\Gamma_1} = s_y|_{\Gamma_2} = 1$, precum şi $\cos(n, y)|_{\Gamma_1} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(n_2, y)|_{\Gamma_2} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, de unde rezultă

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\sqrt{2}}{2}[\delta(\Gamma_1) + \delta(\Gamma_2)] = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\delta(\Gamma).$$

Fie $\theta(x, y)$ distribuţia lui Heaviside (fig. 1.36)

$$\theta(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ 0 \text{ în rest.} \end{cases} \tag{1.4.20}$$

Curba de discontinuitate Γ a acestei funcţii este formată din ramurile

$$\begin{aligned} &(\Gamma_1)\ y = 0,\ x \geqslant 0, \\ &(\Gamma_2)\ x = 0,\ y \geqslant 0, \end{aligned} \tag{1.4.21}$$

Scanned with OKEN Scanner

corespunzătoare semiaxelor Ox și Oy. Observînd că $\frac{\tilde{\partial}\theta}{\partial x} = \frac{\tilde{\partial}\theta}{\partial y} = 0$, $s_x|_{\Gamma_2} = s_y|_{\Gamma_1} = 1$ și $\cos(n, x)|_{\Gamma_2} = \cos(n, y)|_{\Gamma_1} = 1$, obținem

$$\frac{\partial}{\partial x}\theta(x, y) = \delta(\Gamma_2), \quad \frac{\partial}{\partial y}\theta(x, y) = \delta(\Gamma_1). \tag{1.4.22}$$

În acest caz, putem scrie

$$\left(\frac{\partial^2\theta(x, y)}{\partial x\,\partial y}, \varphi(x, y)\right) = \left(\frac{\partial}{\partial y}\delta(\Gamma_2), \varphi(x, y)\right) =$$

$$= -\left(\delta(\Gamma_2), \frac{\partial}{\partial y}\varphi(x, y)\right) = -\int_0^\infty \varphi'_y(0, y)\,dy = -\varphi(0, y)\Big|_0^\infty =$$

$$= \varphi(0, 0) = (\delta(x, y), \varphi(x, y)),$$

de unde

$$\frac{\partial^2\theta(x, y)}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\delta(\Gamma_2) = \frac{\partial}{\partial x}\delta(\Gamma_1) = \delta(x, y). \tag{1.4.23}$$

Ținînd seama de formula de aditivitate pentru distribuția lui Dirac concentrată pe curba $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ și derivînd relațiile (1.4.23) în raport cu x, respectiv y, obținem

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\delta(\Gamma) = \frac{\partial}{\partial x}\delta(x, y) + \frac{\partial}{\partial y}\delta(x, y). \tag{1.4.24}$$

1.4.2. *Distribuții omogene*

1.4.2.1. Rezultate generale

Fie $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o funcție de n variabile, iar $k > 0$ un număr real și pozitiv. Spunem că funcția $f(x)$, $x \in R^n$, este *omogenă și de gradul* λ dacă

$$f(kx_1, kx_2, \ldots, kx_n) = k^\lambda f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad k > 0. \tag{1.4.25}$$

Scanned with OKEN Scanner

Clasa de funcţii definită prin această relaţie este pe deplin caracterizată de *ecuaţia lui Euler*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \lambda f(x_1,x_2,\ldots,x_n), \quad (1.4.26)$$

care este o ecuaţie liniară, de ordinul întîi, neomogenă. Se poate arăta că soluţia generală a acestei ecuaţii este funcţia (1.4.25).

Funcţiile

$$r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}, \ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n, \quad (1.4.27)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}},$$

de exemplu, sînt funcţii omogene de grad 1, respectiv -1. Prima dintre aceste două funcţii este local integrabilă peste tot, pe cînd cea de-a doua funcţie admite originea drept punct singular, nefiind integrabilă în vecinătatea acestui punct.

Funcţia lui Heaviside $\theta(x)$ este o funcţie omogenă de grad zero, deoarece

$$\theta(kx) = \theta(x) = k^0\, \theta(x). \quad (1.4.28)$$

Noţiunea de omogenitate de un grad oarecare poate fi extinsă şi pentru distribuţii, transformarea prin omotetie fiind definită şi în acest caz.

Definiţia 1.4.1. Spunem că distribuţia $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ este *omogenă de grad* λ dacă, pentru orice număr real $k > 0$, verifică o relaţie de forma (1.4.25).

Putem scrie această condiţie şi sub altă formă. Într-adevăr, fiind dată o funcţie fundamentală $\varphi(x) \in K(R^n)$ şi ţinînd seama de transformarea prin omotetie, putem scrie

$$(f(kx_1,\ kx_2,\ \ldots,\ kx_n),\ \varphi(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)) =$$

$$= \frac{1}{k^n}\left(f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\ \varphi\left(\frac{x_1}{k}, \frac{x_2}{k},\ \ldots,\ \frac{x_n}{k}\right)\right) =$$

$$= k^{\lambda}\,(f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\ \varphi(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)),\ k > 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde

$$\left(f(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \varphi\left(\frac{x_1}{k}, \frac{x_2}{k}, \ldots, \frac{x_n}{k}\right)\right) =$$

$$= k^{\lambda+n}(f(x_1\, x_2, \ldots, x_n),\ \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \qquad (1.4.29)$$

sau

$$\left(f(x),\ \varphi\left(\frac{x}{k}\right)\right) = k^{\lambda+n}\,(f(x),\ \varphi(x)),\ x \in R^n.$$

Aceste relații sînt echivalente cu relația (1.4.25) și ne permit să recunoaștem dacă o distribuție este omogenă sau nu.

Pentru distribuția lui Dirac $\delta(x)$, $x \in R^n$, putem scrie

$$\left(\delta(x),\ \varphi\left(\frac{x}{k}\right)\right) = \varphi(0) = (\delta(x),\ \varphi(x)),\ x \in R^n,$$

deci $\delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este o distribuție omogenă de grad $-n$. În particular, $\delta(x)$, $x \in R$, este o distribuție omogenă de grad -1, $\delta(x, y)$ este o distribuție omogenă de grad -2, iar $\delta(x, y, z)$ este o distribuție omogenă de grad -3.

De asemenea, pentru $\delta(x)$, $x \in R$, vom avea

$$\left(\delta^{(p)}(x), \varphi\left(\frac{x}{k}\right)\right) = \frac{(-1)^p}{k^p}\,\varphi^{(p)}(0) = k^{-p}\,(\delta^{(p)}(x),\ \varphi(x)),$$

deci distribuția $\delta^{(p)}(x)$, $x \in R$, este o distribuție omogenă de grad $-p-1$; astfel, prin derivarea de p ori, gradul de omogenitate a scăzut cu p unități.

În general, se poate arăta că distribuțiile omogene se bucură de următoarele proprietăți:

a) Suma a două distribuții omogene de grad λ este tot o distribuție omogenă de grad λ.

b) Dacă $a(x)$ este o funcție omogenă de grad μ, indefinit derivabilă, iar $f(x)$ o distribuție omogenă de grad λ, atunci distribuția $a(x)f(x)$ este o distribuție omogenă de grad $\lambda + \mu$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Derivata distribuției omogene $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de grad λ, în raport cu o variabilă x_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, este o distribuție omogenă de grad $\lambda - 1$.

Se poate arăta că distribuția $\mathrm{Vp}\,\frac{1}{x}$, $x \in R$, este o distribuție omogenă de grad -1; în schimb distribuția $\mathscr{P}\,\frac{1}{|x|}$ nu este o distribuție omogenă.

1.4.2.2. Formule de derivare

Fie $f(x, y)$ o funcție omogenă de grad -1, în sens obișnuit, local integrabilă în R^2; ne propunem să calculăm derivata acestei funcții în raport cu y. Astfel, pentru $\varphi(x, y) \in K(R^2)$ avem

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y), \varphi(x, y)\right) = -\left(f(x, y), -\frac{\partial}{\partial y}\varphi(x, y)\right) =$$

$$= -\iint_D f(x, y) \frac{\partial}{\partial y} [\varphi(x, y) - \varphi(0, 0)]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y -$$

$$-\iint_{R^2 - D} f(x, y) \frac{\partial}{\partial y}\varphi(x, y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

unde D este un domeniu finit, mărginit de frontiera Γ, iar $R^2 - D$ este un domeniu complementar lui D în plan. Observăm că, integrînd prin părți, prima integrală se poate scrie sub forma

$$\iint_D f(x, y) \frac{\partial}{\partial y} [\varphi(x, y) - \varphi(0, 0)]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= -\iint_D \varphi(x, y) \frac{\widetilde{\partial}}{\partial y} f(x, y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_\Gamma f(x, y)[\varphi(x, y) - \varphi(0, 0)]\mathrm{d}x,$$

Scanned with OKEN Scanner

curba Γ fiind parcursă în sens direct ; rezultă

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}, \varphi\right) = \iint_D \varphi \frac{\tilde{\partial} f}{\partial y} \, dx \, dy - \iint_{R^2 - D} f \frac{\partial \varphi}{\partial y} \, dx \, dy +$$

$$+ \int_\Gamma f\varphi \, dx - \varphi(0, 0) \int_\Gamma f \, dx.$$

Alegînd supp $\varphi \subset D$, căpătăm

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}, \varphi\right) = \left(\frac{\tilde{\partial} f}{\partial y}\Big|_D, \varphi\right) - \left(\delta(x, y) \int_\Gamma f \, dx, \varphi(x, y)\right),$$

de unde

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\tilde{\partial}}{\partial y} f(x, y)\Big|_D - \delta(x, y) \int_\Gamma f(x, y) dx. \quad (1.4.30)$$

În mod analog, obţinem

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\tilde{\partial}}{\partial x} f(x, y)\Big|_D + \delta(x, y) \int_\Gamma f(x, y) dy. \quad (1.4.30')$$

Teorema 1.4.1. *Dacă $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este o funcţie omogenă de grad $1 - n$, în sens obişnuit, local integrabilă, atunci derivatele ei parţiale sînt*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\tilde{\partial}}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)|_D +$$

$$+ (-1)^{i-1} \delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) \int_\Gamma f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots$$

$$\ldots dx_{i-1} dx_{i+1} \ldots dx_n, \ (i = 1, 2, \ldots, n), \quad (1.4.31)$$

unde D este un domeniu mărginit din R^n, avînd ca frontieră hipersuprafaţa Γ.

Scanned with OKEN Scanner

1.4.2.3. **Exemple**

Pentru funcţia $\frac{1}{R}$, unde $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, omogenă în sens obişnuit, de grad -1, putem scrie

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{x}{R^3}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{y}{R^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{z}{R^3}; \tag{1.4.32}$$

în felul acesta, obţinem funcţii omogene în sens obişnuit, de grad $1 - 3 = -2$, putînd astfel aplica formula (1.4.31). Rezultă

$$\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{3x^2 - R^2}{R^5} - \delta(x, y, z)\int_\Gamma \frac{x\,dy\,dz}{R^3},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{3y^2 - R^2}{R^5} + \delta(x, y, z)\int_\Gamma \frac{y\,dx\,dz}{R^3}, \tag{1.4.33}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{3z^2 - R^2}{R^5} - \delta(x, y, z)\int_\Gamma \frac{z\,dx\,dy}{R^3};$$

sumînd şi introducînd operatorul lui Laplace

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{1.4.34}$$

căpătăm

$$\Delta\left(\frac{1}{R}\right) = -\delta(x, y, z)\int_\Gamma \frac{x\,dy\,dz - y\,dx\,dz + z\,dx\,dy}{R^3}.$$

Alegînd pentru Γ o sferă cu centrul în origine şi de rază egală cu unitatea şi observînd că $dx\,dz = -dz\,dx$, obţinem

$$\Delta\left(\frac{1}{R}\right) = -4\pi\,\delta(x, y, z). \tag{1.4.35}$$

Scanned with OKEN Scanner

Observăm că $\frac{1}{R}$ este o funcţie armonică pentru $R \neq 0$. Relaţia (1.4.35) pune în evidenţă diferenţa dintre operatorul lui Laplace considerat în sens obişnuit şi cel considerat în sensul teoriei distribuţiilor.

În mod analog, obţinem

$$\Delta \ln \frac{1}{r} = -2\pi \delta(x, y), \; r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1.4.36}$$

Fie funcţia

$$f(x, y) = \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2} \tag{1.4.37}$$

omogenă în sens obişnuit şi de grad $1 - 2 = -1$; în acest caz, putem folosi formulele (1.4.30) şi (1.4.30′). Alegînd pentru Γ un cerc cu centrul în origine şi de rază egală cu unitatea, rezultă

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) &= \frac{x^2(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3} + \frac{3\pi}{4} \delta(x, y), \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) &= -\frac{4x^3 y}{(x^2 + y^2)^3}, \end{aligned} \tag{1.4.38}$$

integrala curbilinie fiind nulă pentru cea de-a doua derivată.

1.5. Transformări integrale în distribuţii

1.5.1. *Transformata Fourier*

1.5.1.1. Transformata Fourier a unei distribuţii de o singură variabilă

Fie $f(x)$, $x \in R$, o funcţie reală sau cu valori complexe, care satisface condiţiile lui Dirichlet (este mărginită, monotonă pe porţiuni şi are un număr finit de puncte de dis-

Scanned with OKEN Scanner

continuitate de prima speță) și este absolut integrabilă, adică

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty. \tag{1.5.1}$$

Transformata exponențială Fourier a funcției $f(x)$ este definită sub forma

$$F(u) = F[f(x)] = \tilde{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}\,\mathrm{d}x, \tag{1.5.2}$$

unde u este noua variabilă reală; *funcția imagine* $\tilde{f}(x) = F[f(x)] = F(u)$ este o funcție complexă de variabilă reală u. Observăm că modulul funcției imagine este mărginit, deoarece

$$|F[f(x)]| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x. \tag{1.5.3}$$

Funcția $F(u)$ este o funcție olomorfă în tot planul complex, cu excepția punctului de la infinit, astfel încît admite derivate de orice ordin în raport cu u. Dacă $f(x)$ este o funcție integrabilă pe R, atunci transformata Fourier a acestei funcții există, reprezentînd o funcție continuă și mărginită, care tinde către zero pentru $|u| \to 0$.

Dacă în relația (1.5.2) considerăm imaginea $F(u)$ cunoscută, funcția $f(x)$ fiind necunoscută, atunci această relație reprezintă o ecuație integrală, a cărei soluție este

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ux}\,\mathrm{d}x; \tag{1.5.4}$$

spunem că $f(x)$ este *transformata inversă Fourier* a lui $F(u)$ și notăm

$$f(x) = F^{-1}[F(u)] = F^{-1}[\tilde{f}(x)] = F^{-1}[F[f(x)]].$$

În felul acesta, am definit doi operatori integrali: operatorul direct $F[\ ]$ și operatorul invers $F^{-1}[\ ]$;

Scanned with OKEN Scanner

aceşti operatori sînt liniari, deoarece, pentru $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1$ numere reale sau complexe, avem

$$F[\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)] = \alpha F[f_1(x)] + \beta F[f_2(x)], \tag{1.5.5}$$
$$F^{-1}[\alpha_1 F_1(u) + \beta_1 F_2(u)] = \alpha_1 F^{-1}[F_1(u)] + \beta_1 F^{-1}[F_2(u)].$$

În unele aplicaţii se pot folosi cu succes *transformatele cosinus* şi *sinus Fourier*, definite sub forma

$$F_c[f(x)] = \int_0^\infty f(x) \cos ux \, dx, \tag{1.5.6}$$
$$F_s[f(x)] = \int_0^\infty f(x) \sin ux \, dx.$$

Între aceste două transformate Fourier şi transformata exponenţială Fourier există o legătură strînsă. Dacă $f(x)$ este o *funcţie pară*, $f(x) = f(-x)$, rezultă

$$F[f(x)] = 2F_c[f(x)]; \tag{1.5.7}$$

în mod analog, dacă $f(x)$ este o *funcţie impară*, adică $f(x) = -f(-x)$, putem scrie

$$F[f(x)] = 2iF_s[f(x)].$$

În general, o funcţie $f(x)$ poate fi scrisă totdeauna ca o sumă a două funcţii

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \tag{1.5.8}$$

unde

$$f_1(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)], \quad f_2(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)],$$

prima fiind pară iar a doua impară în raport cu x; rezultă astfel

$$F[f(x)] = 2F_c[f_1(x)] + 2iF_s[f_2(x)]. \tag{1.5.9}$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie, de exemplu, funcţia (fig. 1.37)

$$f(x) = \theta(x)e^{-ax} = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x < 0, \\ e^{-ax} & \text{pentru } x \geqslant 0,\ a > 0, \end{cases} \tag{1.5.10}$$

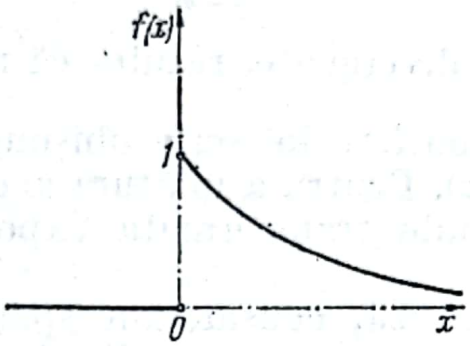


Fig. 1.37.

continuă, cu excepţia originii, unde are un salt egal cu unitatea; această funcţie este absolut integrabilă pe R, deoarece $\int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}$. Obţinem

$$F[\theta(x)\,e^{-ax}] = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)\,e^{-ax}\,e^{iux}\,dx =$$

$$= \int_0^\infty e^{-ax}\,e^{iux}\,dx = -\frac{1}{a - iu}\,e^{-ax}\,e^{iux}\Big|_0^\infty;$$

ţinînd seama de *formula lui Euler*

$$e^{iux} = \cos ux + i \sin ux,\ |e^{iux}| = 1, \tag{1.5.11}$$

rezultă

$$F[\theta(x)\,e^{-ax}] = \frac{1}{a - iu} = \frac{a}{a^2 + u^2} + i\frac{u}{a^2 + u^2}. \tag{1.5.12}$$

În mod analog,

$$F_c[\theta(x)e^{-ax}] = \int_0^\infty e^{-ax} \cos ux\,du = \frac{a}{a^2 + u^2}, \tag{1.5.13}$$

$$F_s[\theta(x)e^{-ax}] = \int_0^\infty e^{-ax} \sin ux\,du = \frac{u}{a^2 + u^2}, \quad a > 0,$$

deci

$$F[\theta(x)e^{-ax}] = F_c[\theta(x)e^{-ax}] + iF_s[\theta(x)e^{-ax}]. \quad (1.5.14)$$

Observînd că integralele $\int_{-\infty}^{\infty} |\sin x|\,dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} |\cos x|\,dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} |\theta(x)|\,dx$ sînt divergente, rezultă că nu putem calcula transformatele Fourier, în sens obişnuit, ale funcţiilor $\sin x$, $\cos x$ şi $\theta(x)$. Pentru a înlătura aceste cazuri de excepţie, vom extinde transformata exponenţială Fourier la distribuţii.

În cele ce urmează, considerăm spaţiul fundamental K cu valori complexe, constituit din funcţiile fundamentale $\varphi(x)$ cu valori complexe şi de variabilă reală, indefinit derivabile şi cu suport compact. Fie deci $\varphi(x)$, $x \in R$, o funcţie fundamentală complexă; transformata ei Fourier va fi dată de

$$F[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)e^{iux}\,dx, \quad (1.5.15)$$

unde u este o variabilă reală. În locul variabilei reale u, putem considera variabila complexă $s = u + iv$, astfel încît

$$\psi(s) = \tilde{\varphi}(x) = F[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)e^{isx}\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)e^{-vx}e^{iux}\,dx; \quad (1.5.16)$$

deoarece funcţia $\varphi(x)$ are suport compact, integrala din această formulă se consideră numai pe un interval corespunzînd suportului respectiv.

Funcţiile $\psi(s)$ sînt olomorfe în tot planul complex, cu excepţia punctului de la infinit, fiind astfel indefinit derivabile. Integrînd prin părţi, obţinem

$$F[\varphi'(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x)e^{isx}dx = \varphi(x)\,e^{isx}\Big|_{-\infty}^{\infty} -$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} is\varphi(x)\,e^{isx}\,dx,$$

Scanned with OKEN Scanner

deci imaginea funcției $\varphi'(x)$ va fi

$$F[\varphi'(x)] = -isF[\varphi(x)]; \qquad (1.5.17)$$

în general, putem scrie

$$F[\varphi^{(p)}(x)] = (-is)^p F[\varphi(x)], \quad p \in N.$$

Dacă $P\left(\frac{d}{dx}\right)$ reprezintă un polinom diferențial cu coeficienți constanți, rezultă

$$F\left[P\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)\right] = P(-is)F[\varphi(x)]. \qquad (1.5.18)$$

Fie $\varphi(x) \in K(a)$ funcții fundamentale cu suportul inclus în intervalul $[-a, a]$, $a > 0$; mulțimea transformatelor Fourier $\psi(s) = F[\varphi(x)]$ ale acestor funcții formează spațiul vectorial $Z(a)$. Reuniunea acestor spații după a ne va da *spațiul fundamental complex*

$$Z = \bigcup_a Z(a), \quad (K = \bigcup_a K(a)). \qquad (1.5.19)$$

Funcțiile $\psi(s) \in Z(a)$ satisfac inegalitatea

$$|s^p \psi(s)| \leqslant C_p e^{a|v|}, \quad s = u + iv, \quad p \in N_0, \qquad (1.5.20)$$

unde C_p este o constantă care depinde de p.

Definiția 1.5.1. Șirul $\psi_n(s) \in Z$ *converge către* $\psi(s) \in Z$ dacă termenii șirului satisfac inegalitatea (1.5.20), unde C_p și a nu depind de n, și dacă funcțiile $\psi_n(s)$ converg uniform către $\psi(s)$ pe orice interval al axei reale.

Spațiul Z astfel obținut constituie spațiul fundamental pe care vom defini transformata Fourier în distribuții. Fie Z' mulțimea funcționalelor liniare și continue definite pe Z. Funcționalele $F(s) \in Z'$ reprezintă distribuții definite pe spațiul fundamental complex Z; aceste distribuții sînt numite și *ultradistribuții*. Între spațiile K și Z există o corespondență biunivocă, astfel încît putem scrie

$$F[K] = Z, \quad F^{-1}[Z] = K.$$

Fie $f(x)$, $x \in R$, o distribuție definită pe spațiul fundamental K.

Scanned with OKEN Scanner

Definiția 1.5.2. *Transformata Fourier a distribuției* $f(x) \in K'(R)$ va fi exprimată de distribuția $F(s) \in Z'$, definită pe Z prin relația de tip Parseval

$$(F[f(x)], F[\varphi(x)]) = (\tilde{f}(x), \tilde{\varphi}(x)) = 2\pi(f(x), \varphi(x)). \quad (1.5.21)$$

În mod analog, putem defini transformata Fourier a unei distribuții definită pe spațiul fundamental S.

1.5.1.2. Proprietăți

Proprietățile principale ale transformatei Fourier a unei funcții obișnuite se mențin și în cazul distribuțiilor. Astfel putem scrie

$$F\left[P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)f(x)\right] = P(-is)\,F[f(x)] = P(-is)\,F(s), \quad (1.5.22)$$

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right)F(s) = P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right)F[f(x)] = F[P(ix)f(x)], \quad (1.5.22')$$

$$F^{-1}[F[f(x)]] = f(x), \quad (1.5.23)$$

$$F[F[f(x)]] = 2\pi f(-x), \quad (1.5.23')$$

unde F^{-1} este operatorul invers lui F, care satisface relația

$$(F^{-1}[f(u)], \varphi(x)) = \frac{1}{2\pi}(f(u), F[\varphi(x)]).$$

În legătură cu *produsul direct* a două distribuții, are loc relația

$$F[f(x) \times g(y)] = F[f(x)] \times F[g(y)]. \quad (1.5.24)$$

Dacă $f(x)$ este o distribuție temperată, iar $g(x)$ este o distribuție cu suport mărginit, atunci putem scrie, în legătură cu *produsul de convoluție*, relația

$$F[f(x)*g(x)] = F[f(x)]\,F[g(x)]\,; \quad (1.5.25)$$

Scanned with OKEN Scanner

de asemenea, dacă $f(x) \in S'$, iar funcţia $a(x) \in C^\infty$ este astfel încît $F[a(x)]$ are suport mărginit iar $a(x)f(x) \in S'$, putem scrie

$$F[a(x)f(x)] = F[a(x)] * F[f(x)].$$

În cazul distribuţiilor cu suport mărginit şi în cazul distribuţiilor temperate, care apar în multe probleme, observăm că transformata Fourier se poate calcula după formule mai simple.

Astfel, dacă $f(x)$ este o *distribuţie cu suport mărginit*, atunci transformata ei Fourier satisface *relaţia*

$$\tilde{f}(x) = F[f(x)] = (\bar{f}(x),\ e^{iux}) = (\overline{f(x),\ e^{-iux}}) = F(u). \tag{1.5.26}$$

De asemenea, dacă $f(x) \in S'$, adică este o *distribuţie temperată*, avem

$$(F[f(x)],\ \varphi(u)) = (f(u),\ F[\varphi(x)]). \tag{1.5.27}$$

Fie acum şirul $f_n(x)$, care determină distribuţia $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, limita fiind considerată în sensul teoriei distribuţiilor; dacă $F_n(s) = F[f_n(x)]$ şi $F(s) = F[f(x)]$, atunci

$$F(s) = \lim_{n\to\infty} F_n(s). \tag{1.5.28}$$

23

1.5.1.3. Transformata Fourier a unei distribuţii de mai multe variabile

Transformatele Fourier se pot defini analog şi în cazul distribuţiilor de mai multe variabile. Dacă $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K(R^n)$, atunci transformata Fourier $\psi(s_1, s_2, \ldots, s_n) = F[\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$, unde $s_j = u_j + iv_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, este definită prin relaţia

$$\tilde{\varphi}(x) = F[\varphi(x)] = \int_{R^n} \varphi(x) e^{i(s,x)}\, dx, \quad x \in R^n, \tag{1.5.29}$$

unde am introdus produsul scalar

$$(s, x) = s_1x_1 + s_2x_2 + \ldots + s_nx_n. \tag{1.5.30}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K'(R^n)$, transformata Fourier se definește sub forma

$$(\tilde{f}(x), \tilde{\varphi}(x)) = (2\pi)^n (f(x), \varphi(x)), \quad x \in R^n. \quad (1.5.31)$$

În particular, dacă o funcție integrabilă în R^n este de forma

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \ldots f_n(x_n), \quad (1.5.32)$$

transformata ei Fourier va fi

$$F[f(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = F[f_1(x_1)] F[f_2(x_2)] \ldots F[f_n(x_n)]. \quad (1.5.33)$$

Pentru distribuțiile temperate, putem scrie de asemenea o formulă de forma (1.5.27).

Transformata Fourier a distribuțiilor cu suport mărginit se calculează cu ajutorul formulei

$$F[f(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = (\bar{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n), e^{i(s_1 x_1 + s_2 x_2 + \cdots + s_n x_n)}). \quad (1.5.34)$$

Pentru transformata Fourier a unei distribuții de mai multe variabile putem stabili relația

$$F\left[P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right] =$$

$$= P(-is_1, -is_2, \ldots, -is_n) F(s_1, s_2, \ldots, s_n), \quad (1.5.35)$$

unde $P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ este un polinom diferențial cu coeficienți constanți, precum și relația

$$P\left(\frac{\partial}{\partial s_1}, \frac{\partial}{\partial s_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial s_n}\right) F[f(x_1, x_2, \ldots, x_n)] =$$

$$= F[P(ix_1, ix_2, \ldots, ix_n) f(x_1, x_2, \ldots, x_n)].$$

Scanned with OKEN Scanner

În ceea ce privește transformata inversă F^{-1}, vom scrie

$$(F^{-1}[f(u)],\ \varphi(x)) = \frac{1}{(2\pi)^n}\,(f(u), F[\varphi(x)]),\ x \in R^n.$$

În legătură cu produsul direct și cu produsul de convoluție se stabilesc formule analoage cu formulele (1.5.24) și (1.5.25).

1.5.1.4. Aplicații

Ca și pentru transformata Fourier dată de formula (1.5.12), obținem

$$F[\theta(-x)\,e^{-a|x|}] = \frac{1}{a+iu},\ a>0. \qquad (1.5.36)$$

Ținînd seama de relația (1.2.39), căpătăm

$$F[e^{-a|x|}] = \frac{2a}{a^2+u^2},\ a>0. \qquad (1.5.37)$$

Observăm că funcția $e^{-a|x|}$ definește o distribuție temperată. Putem scrie

$$\lim_{a\to+0}\frac{a}{\pi(x^2+a^2)} = \delta(x), \qquad (1.5.38)$$

care corespunde unui șir reprezentativ δ, definit de funcția lui Cauchy (1.2.87). Trecînd la limită pentru $a \to +0$ în formula (1.5.37), obținem

$$F[1(x)] = 2\pi\,\delta(u), \qquad (1.5.39)$$

precum și

$$F^{-1}[\delta(u)] = \frac{1}{2\pi}.$$

Deoarece $\delta(x)$ este o distribuție cu suport mărginit, transformata ei Fourier se poate calcula folosind formula (1.5.26); obținem

$$F[\delta(x)] = (\overline{\delta(x),\ e^{-iux}}) = e^0 = 1. \qquad (1.5.40)$$

Scanned with OKEN Scanner

În mod analog,

$$F[\delta(x-a)] = e^{iua},\ F[\delta(kx)] = \frac{1}{|k|}, \qquad (1.5.41)$$

unde am ţinut seama de relaţia (1.1.55), respectiv (1.1.77).

Dacă în (1.5.12) facem $a \to +0$, obţinem

$$F[\theta(x)] = \lim_{a\to+0} \frac{1}{a - iu} = \lim_{a\to+0}\left[\frac{a}{a^2+u^2} + i\frac{u}{a^2+u^2}\right];$$

observînd că

$$\lim_{a\to+0} \frac{u}{a^2+u^2} = \mathrm{Vp}\,\frac{1}{u}, \qquad (1.5.42)$$

putem scrie

$$F[\theta(x)] = \pi\delta(u) + i\,\mathrm{Vp}\,\frac{1}{u}. \qquad (1.5.43)$$

Ajungem la acelaşi rezultat dacă efectuăm transformata Fourier a distribuţiei $\theta(x)$, definită pe K, şi apoi efectuăm prelungirea ei din K în S, în baza observaţiei de la 1.1.3.1. Într-adevăr, putem scrie

$$F\left[\frac{d\theta(x)}{dx}\right] = F[\delta(x)] = -is\,F[\theta(x)] = 1,\quad s = u + iv,$$

de unde rezultă

$$F[\theta(x)] = -\frac{1}{is} = \frac{i}{s} = \frac{i}{u+iv}; \qquad (1.5.43')$$

făcînd $v \to +0$ şi ţinînd seama de limitele (1.5.38), (1.5.42), obţinem aceeaşi formulă (1.5.43).

Observăm că relaţia (1.5.43′) exprimă transformata unei distribuţii definite pe spaţiul K, pe cînd relaţia (1.5.43) exprimă transformata unei distribuţii definite pe spaţiul S.

Scanned with OKEN Scanner

Ţinînd seama de relaţia (1.2.43) a lui Sohoţki, mai putem scrie

$$F[\theta(x)] = \frac{\mathrm{i}}{u + \mathrm{i}0}.$$

În mod analog, ţinînd seama de relaţia (1.2.39), obţinem

$$F[\theta(-x)] = \pi\delta(u) - \mathrm{i}\,\mathrm{Vp}\frac{1}{u} = -\frac{\mathrm{i}}{u - \mathrm{i}0}. \quad (1.5.44)$$

Cu ajutorul formulelor (1.2.46), care introduc distribuţiile lui Heisenberg, mai putem scrie

$$F[\theta(x)] = 2\pi\,\delta_+(u), \quad F[\theta(-x)] = 2\pi\,\delta_-(u). \quad (1.5.45)$$

Formula (1.5.22) aplicată primei relaţii (1.2.42) ne conduce la

$$F[x_+] = -\frac{1}{s^2}. \quad (1.5.46)$$

Observăm însă că x_+ este o distribuţie temperată, care poate fi prelungită pe spaţiul S; prin urmare

$$F[x_+] = -\lim_{v\to+0}\frac{1}{s^2}.$$

Dar

$$\lim_{v\to+0}\frac{u^2 - v^2}{(u^2 + v^2)^2} = \mathrm{Vp}\,\frac{1}{u^2},$$

$$\lim_{v\to+0}\frac{2}{\pi}\frac{uv}{(u^2 + v^2)^2} = -\,\delta'(u), \quad (1.5.47)$$

deci

$$F[x_+] = -\,\mathrm{Vp}\frac{1}{u^2} - \mathrm{i}\,\pi\,\delta'(u);$$

Scanned with OKEN Scanner

cu ajutorul formulei (1.2.47), mai putem scrie

$$F[x_+^{-}] = -\frac{1}{(u + \mathrm{i}0)^2}.$$

În mod analog, ţinînd seama de formulele (1.2.42′), (1.2.47) şi aplicînd metoda inducţiei complete, se poate arăta că

$$F[x_+^n] = n!\ \mathrm{i}^{n+1}\ \mathrm{Vp}\ \frac{1}{u^{n+1}} + \pi(-\mathrm{i})^n\ \delta^{(n)}(u) =$$

$$= \frac{n!\ \mathrm{i}^{n+1}}{(u + \mathrm{i}0)^{n+1}}, \quad n \in N. \tag{1.5.48}$$

Pe aceeaşi cale, se poate arăta că

$$F[x_-] = -\mathrm{Vp}\ \frac{1}{u^2} + \mathrm{i}\,\pi\,\delta'(u) = -\frac{1}{(u - \mathrm{i}0)^2} \tag{1.5.49}$$

$$F[x_-^n] = n!\ \mathrm{i}^{n+1}\ \mathrm{Vp}\ \frac{1}{u^{n+1}} - \pi\,(-i)^n \delta^{(n)}(u) =$$

$$= \frac{n!\ \mathrm{i}^{n+1}}{(u - \mathrm{i}0)^{n+1}}, \quad n \in N. \tag{1.5.50}$$

Ţinînd seama de relaţiile (1.2.41), mai putem scrie

$$F[x] = -2\mathrm{i}\,\pi\delta'(u),\ F[|x|] = -2\ \mathrm{Vp}\ \frac{1}{u^2}. \tag{1.5.51}$$

Pentru a calcula transformata Fourier a distribuţiei $\mathrm{Vp}\ \frac{1}{x}$, vom pleca de la distribuţia lui Heaviside, aplicînd formula (1.5.23′); rezultă

$$F[F[\theta(u)]] = \pi F[\delta(x)] + \mathrm{i}F\left[\mathrm{Vp}\ \frac{1}{x}\right] =$$

$$= \pi + \mathrm{i}F\left[\mathrm{Vp}\ \frac{1}{x}\right] = 2\pi\ \theta(-u),$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde

$$F\left[\mathrm{Vp}\frac{1}{x}\right] = \mathrm{i}\,\pi\,\mathrm{sgn}\,u, \tag{1.5.52}$$

unde am ţinut seama de formula (1.2.39′). De asemenea, putem scrie

$$F[\mathrm{sgn}\,x] = 2\,\mathrm{iVp}\,\frac{1}{u}.$$

Plecînd de la formula (1.5.36), aplicînd transformata Fourier în ambii membri şi ţinînd seama de formula (1.5.23′), găsim

$$F\left[\frac{a}{\pi(a^2+x^2)}\right] = \mathrm{e}^{-a|u|},\ a>0\,; \tag{1.5.53}$$

formula (1.5.25) ne permite să dăm, în acest caz, o nouă demonstraţie relaţiei (1.3.32), scrisă pentru funcţia (1.3.33).

Pentru transformata Fourier a funcţiei $f(x)=\mathrm{e}^{-a^2x^2}\in S$ putem scrie

$$F[\mathrm{e}^{-a^2x^2}] = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-a^2x^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}\,\mathrm{d}x = F(u)\,;$$

derivînd în raport cu u, căpătăm

$$F'(u) = \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{e}^{-a^2x^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{i}}{2a^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-a^2x^2}) =$$

$$= -\frac{\mathrm{i}}{2a^2}\left[\mathrm{e}^{-a^2x^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{i}u\,\mathrm{e}^{-a^2x^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ux}\,\mathrm{d}x\right] = -\frac{u}{2a^2}F(u),$$

de unde

$$F'(u) + \frac{u}{2a^2}F(u) = 0.$$

Integrînd, obţinem

$$F(u) = C\,\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{4a^2}}\,;$$

Scanned with OKEN Scanner

deci, pentru $u = 0$, putem scrie

$$F(0) = C = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{|a|},$$

astfel încît

$$F(u) = F[e^{-a^2x^2}] = \frac{\sqrt{\pi}}{|a|} e^{-\frac{u^2}{4a^2}}. \qquad (1.5.54)$$

În mod analog, se poate demonstra relaţia (1.3.32) pentru funcţia (1.3.30).

Dacă $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$, putem calcula diferite transformate Fourier. Astfel :

$$F[\delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = 1, \qquad (1.5.55)$$

$$F[\delta(x_1 - a_1, x_2 - a_2, \ldots, x_n - a_n)] = e^{i(u_1a_1 + u_2a_2 + \cdots + u_na_n)}, \qquad (1.5.56)$$

$$F[\delta(kx_1, kx_2, \ldots, kx_n)] = \frac{1}{|k|^n}, \qquad (1.5.57)$$

$$F[1(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = (2\pi)^n \delta(s_1, s_2, \ldots, s_n), \qquad (1.5.58)$$

$$F[e^{-(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)}] = \pi^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{4}(u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2)}. \qquad (1.5.59)$$

Alte transformate Fourier, utile în aplicaţii, se obţin pe aceeaşi cale.

1.5.2. *Transformata Laplace*

1.5.2.1. Transformata Laplace a unei distribuţii de o singură variabilă

Transformata Laplace a unei funcţii $f(x)$ de variabilă reală este o funcţie $L(p)$ de variabilă complexă, definită prin relaţia

$$L(p) = \int_0^{\infty} f(x)\, e^{-px} dx. \qquad (1.5.60)$$

Scanned with OKEN Scanner

Carson a folosit de asemenea calculul simbolic, bazat pe transformarea

$$C(p) = p\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{e}^{-px}\mathrm{d}x, \tag{1.5.61}$$

care se numește *transformata Carson* a lui $f(x)$; între cele două transformate există relația evidentă

$$C(p) = pL(p). \tag{1.5.62}$$

Ulterior, calculul simbolic al lui Heaviside a fost dezvoltat, folosind transformata Laplace (1.5.60).

Definiția 1.5.3. Dacă $f(x)$, $x \in R$, este o funcție complexă de variabilă reală, care satisface condițiile:

a) $f(x) = 0$ pentru $x < 0$,

b) $f(x)$ este derivabilă pe porțiuni,

c) $|f(x)| \leqslant M\,\mathrm{e}^{ax}$, $M > 0$, $a \geqslant 0$,

atunci transformata Laplace a funcției $f(x)$ este o *funcție complexă de variabilă complexă* $p = u + iv$, definită prin relația

$$L[f(x)] = \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{e}^{-px}\mathrm{d}x. \tag{1.5.63}$$

Funcția $f(x)$ care verifică condițiile a) — c) se numește *funcție original*, iar funcția $L[f(x)]$ se numește *funcția imagine* a lui $f(x)$. Se poate arăta că funcția imagine $L(p)$, definită prin relația (1.5.63), este o funcție olomorfă în semiplanul complex $\mathrm{Re}\,p > a$. Numărul a, care intră prin intermediul mărginirii exponențiale c) a funcției original $f(x)$, se numește *indicele de creștere* al acestei funcții; în particular, dacă funcția original este o funcție mărginită, indicele său de creștere este $a = 0$.

Se verifică ușor că funcțiile x_+^n, $\theta(x)\cos x$, $\theta(x)\sin x$, $\theta(x)\mathrm{e}^{-x^2}$ sînt funcții original; funcția $\theta(x)\,\mathrm{e}^{x^2}$ nu este funcție original; suma și produsul a două funcții original este o funcție original.

Scanned with OKEN Scanner

Din cauza olomorfiei, funcţia (1.5.63) este indefinit derivabilă în raport cu p în semiplanul $\operatorname{Re} p > a$ şi putem scrie relaţia (*teorema derivării funcţiei imagine*)

$$L^{(n)}(p) = \int_0^\infty (-x)^n f(x)\, \mathrm{e}^{-px} \mathrm{d}x = L[(-x)^n f(x)]\,; \quad (1.5.64)$$

indicele de creştere al funcţiei original $(-x)^n f(x)$ este acelaşi cu indicele de creştere al funcţiei original $f(x)$.

Dacă funcţia $f(x)$ este de clasa C^1 pe $[0, \infty)$, putem scrie

$$L[f'(x)] = \int_0^\infty f'(x)\, \mathrm{e}^{-px}\, \mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-px} \mathrm{d}f(x) =$$

$$= f(x)\, \mathrm{e}^{-px} \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty f(x)\, \mathrm{e}^{-px} \mathrm{d}x\,;$$

de aici rezultă

$$L[f'(x)] = pL[f(x)] - f(0 + 0), \quad (1.5.65)$$

unde observăm că $f(0 + 0)$ reprezintă saltul funcţiei $f(x)$ în origine, iar $f(0 - 0) = 0$.

Transformata Laplace inversă, notată L^{-1}, este definită prin relaţia

$$L^{-1}[L(p)] = L^{-1}[L[f(x)]] = f(x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{u-\mathrm{i}\infty}^{u+\mathrm{i}\infty} L(p)\, \mathrm{e}^{px} \mathrm{d}p,\ u > 0. \quad (1.5.66)$$

Pentru funcţia lui Heaviside $\theta(x)$, putem scrie

$$L[\theta(x)] = \int_0^\infty \theta(x)\, \mathrm{e}^{-px} \mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-px} \mathrm{d}x = -\frac{1}{p}\, \mathrm{e}^{-ux}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}vx} \Big|_0^\infty;$$

observînd că $|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}vx}| = 1$, iar $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-ux} = 0$ numai dacă $u > 0$, rezultă

$$L[\theta(x)] = \frac{1}{p},\ \operatorname{Re} p > 0. \quad (1.5.67)$$

Scanned with OKEN Scanner

Procedînd în mod analog, căpătăm

$$L[\theta(x)\, e^{\lambda x}] = \frac{1}{p-\lambda}, \quad \text{Re } p > \text{Re } \lambda, \tag{1.5.68}$$

$$L[\theta(x)\sin \omega x] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2},$$

$$L[\theta(x)\cos \omega x] = \frac{p}{p^2+w^2}, \quad \text{Re } p > |\text{Im } \omega)|. \tag{1.5.69}$$

Formula (1.5.63) de definiție a transformatei Laplace a unei funcții poate fi extinsă și în cazul distribuțiilor.

Definiția 1.5.4. Dacă $f(x)$ este o distribuție de o singură variabilă, cu supp $f \subset [0, \infty)$, și astfel încît produsul $f(x)\, e^{-pt}$ este o distribuție temperată ($f(x)\, e^{-pt} \in S'$), atunci

$$L[f(x)] = (f(x),\ e^{-px}) \tag{1.5.70}$$

reprezintă *transformata Laplace* a acestei distribuții.

1.5.2.2. Proprietăți. Aplicații

Proprietățile clasice ale transformatei Laplace se conservă și în cazul distribuțiilor. Observînd că

$$L[f(kx)] = (f(kx),\ e^{-px}) = \frac{1}{k}\ (f(x),\ e^{-\frac{px}{k}}),\ k>0,$$

putem scrie *teorema asemănării*

$$L[f(kx)] = \frac{1}{k} L\left(\frac{p}{k}\right),\ k>0; \tag{1.5.71}$$

în mod analog, obținem *teorema întîrzierii*

$$L[f(x-a)] = e^{-pa} L[f(x)] \tag{1.5.72}$$

Scanned with OKEN Scanner

și *teorema derivării*

$$L[f'(x)] = pL[f(x)] \tag{1.5.73}$$

sau, mai general,

$$L[f^{(n)}(x)] = p^n L[f(x)], \tag{1.5.73'}$$

unde derivatele se consideră în sensul teoriei distribuțiilor.

Observăm că

$$L[\delta(x)] = (\delta(x),\ e^{-px}) = e^0 = 1; \tag{1.5.74}$$

de asemenea, formulele (1.5.71) — (1.5.73') ne permit să scriem

$$L[\delta(kx)] = \frac{1}{k},\ k > 0, \tag{1.5.75}$$

$$L[\delta(x-a)] = e^{-pa}, \tag{1.5.76}$$

$$L[\delta^{(n)}(x)] = p^n. \tag{1.5.77}$$

Dacă plecăm de la transformata Laplace (1.5.67) și folosim relația (1.5.64), obținem

$$L[(-x)^n \theta(x)] = \left(\frac{1}{p}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{p^{n+1}},$$

de unde

$$L[x_+^n] = \frac{n!}{p^{n+1}} = -1)^n \left(\frac{1}{p}\right)^{(n)}. \tag{1.5.78}$$

Ținînd seama de formula de descompunere (1.2.71''), căpătăm

$$L[\delta(x^2 - a^2)] = \frac{1}{2a}(e^{pa} + e^{-pa}) = \frac{1}{a} \operatorname{ch} pa,\ a > 0; \tag{1.5.79}$$

de asemenea, formula (1.2.75) ne conduce la

$$L[\delta(\sin x)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n\pi). \tag{1.5.80}$$

Scanned with OKEN Scanner

Mai observăm că transformata Laplace (1.5.68) se poate generaliza sub forma *teoremei translației* (*teorema de amortizare*)

$$L[f(x)\,e^{\lambda x}] = L(p-\lambda). \qquad (1.5.81)$$

În ceea ce privește imaginea derivatei unei funcții original, observăm că formula în distribuții (1.5.73) diferă în general de formula clasică (1.5.65); identitatea formală are loc numai dacă funcția original este continuă în origine, deci dacă saltul ei în origine este $f(0+0)=0$. În realitate, formula (1.5.73) este mai generală decît formula (1.5.65), aceasta din urmă putîndu-se obține din prima prin particularizare. Într-adevăr, introducînd derivata în sensul teoriei distribuțiilor și derivata în sens obișnuit și folosind formula (1.2.28), putem scrie

$$f'(x) = \tilde{f}'(x) + f(0+0)\delta(x),$$

de unde

$$L[f'(x)] = L[\tilde{f}'(x)] + f(0+0); \qquad (1.5.82)$$

ținînd seama de (1.5.73), regăsim formula (1.5.65).

În cazul în care funcția $f(x)$ are mai multe puncte de discontinuitate de speța întîi $x_i\,(i=1,2,\ldots,n)$, vom putea scrie

$$f'(x) = \tilde{f}'(x) + f(0+0)\delta(x) + \sum_{i=1}^{n} s_i\delta(x-x_i),$$

unde s_i reprezintă saltul în punctul de discontinuitate x_i; aplicînd transformata Laplace acestei expresii, obținem

$$L[f'(x)] = L[\tilde{f}'(x)] + f(0+0) + \sum_{i=1}^{n} s_i\,e^{-ps_i}. \qquad (1.5.82')$$

Fie $f(x)$ și $g(x)$ două distribuții, avînd suportul pe intervalul $[0,\infty)$ și astfel încît transformatele lor Laplace există pentru $\operatorname{Re} p > a_1$, respectiv $\operatorname{Re} p > a_2$; atunci, pentru $\operatorname{Re} p > \max(a_1, a_2)$, avem

$$(f(x),\ e^{-px}) = L[f(x)],\quad (g(x),\ e^{-px}) = L[g(x)]. \qquad (1.5.83)$$

Scanned with OKEN Scanner

Conform definiției produsului de convoluție, putem scrie

$$(f(x) * g(x),\ e^{-px}) = (f(x) \times g(y),\ e^{-p(x+y)}) =$$

$$= (f(x),\ (g(y),\ e^{-p(x+y)})) = (g(y),\ e^{-py})\ (f(x),\ e^{-px}) =$$

$$= L\,[f(x)]\ L[g(x)],$$

adică

$$L[f(x) * g(x)] = L[f(x)]\ L[g(x)]\,; \qquad (1.5.84)$$

deci, transformata Laplace a *produsului de convoluție* a două distribuții este egală cu produsul imaginilor celor două distribuții, în cazul în care produsul de convoluție are sens.

Din relația (1.3.27) căpătăm

$$L[x_+] = \frac{1}{p^2}, \qquad (1.5.85)$$

rezultat ce se poate obține și, prin particularizare, din formula (1.5.78).

În mod analog, putem scrie

$$L[\theta(x)\ e^{\lambda x} * \theta(x)] = \frac{1}{p(p-\lambda)}, \quad \mathrm{Re}\, p > \mathrm{Re}\, \lambda, \qquad (1.5.86)$$

$$L[\theta(x)\ e^{\lambda x} * \theta(x)\ e^{\mu x}] = \frac{1}{(p-\lambda)(p-\mu)},$$

$$\mathrm{Re}\, p > \max\ (\mathrm{Re}\, \lambda,\ \mathrm{Re}\, \mu),$$

$$L[f(x) * \delta^{(n)}(x)] = p^n\, L[f(x)], \qquad (1.5.87)$$

$$L[f(x) * \delta(x)] = L[f(x)].$$

21

1.5.2.3. Transformata Laplace a unei distribrții de mai multe variabile

Atît definiția clasică a transformatei Laplace, în cazul unei singure variabile, cît și definiția corespunzătoare pentru distribuții se pot extinde și la cazul mai multor

Scanned with OKEN Scanner

variabile. Astfel, dacă $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este o funcţie complexă de variabile reale, care verifică condiţiile :

a) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ pentru $x_1 < 0$ sau $x_2 < 0$ sau ... ...sau $x_n < 0$,

b) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ admite derivate parţiale de ordinul întîi,

c) $|f(x_1, x_2, \ldots, x_n)| \leqslant M e^{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n}$, $M > 0$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \geqslant 0$,

atunci *transformata Laplace a funcţiei* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este o funcţie complexă de n variabile $p_j = u_j + iv_j$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$, definită de expresia

$$L(p_1, p_2, \ldots, p_n) = L([f(x_1, x_2, \ldots, x_n)] =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, e^{-(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n)}\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n \tag{1.5.88}$$

sau

$$L[f(x)] = \int_{R^n} f(x)\, e^{-(p,x)}\, dx,\ x \in R^n, \tag{1.5.88'}$$

unde

$$(p, x) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n,\ dx = dx_1\, dx_2 \ldots dx_n. \tag{1.5.88''}$$

Funcţia imagine $L(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ este o funcţie olomorfă în domeniul $\operatorname{Re} p_i > a_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Transformata Laplace inversă este definită prin relaţia

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = L^{-1}[L[f(x_1, x_2, \ldots, x_n)]] =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{u_1 - i\infty}^{u_1 + i\infty} \int_{u_2 - i\infty}^{u_2 + i\infty} \ldots \int_{u_n - i\infty}^{u_n + i\infty} L(p_1, p_2, \ldots, p_n) \times$$

$$\times e^{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n}\, dp_1\, dp_2 \ldots dp_n, \tag{1.5.89}$$

pentru $u_j > a_j$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$; evident, vom avea

$$L^{-1}[L(p_1, p_2, \ldots, p_n)] = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Scanned with OKEN Scanner

În particular, pentru $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1) f(x_2) \ldots f_n(x_n)$ putem scrie

$$L[f_1(x_1) f_2(x_2) \ldots f_n(x_n)] = L[f_1(x_1)]\, L[f_2(x_2)] \ldots L[f_n(x_n)]. \tag{1.5.90}$$

Astfel, pentru funcţia lui Heaviside $\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \theta(x_1)\, \theta(x_2) \ldots \theta(x_n)$ obţinem

$$L([\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = L[\theta(x_1)] L[\theta(x_2)] \ldots L[\theta(x_n)] =$$

$$= \frac{1}{p_1 p_2 \ldots p_n}, \quad \operatorname{Re} p_i > 0, \ (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.5.91}$$

În mod analog, se poate arăta că

$$L[\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, e^{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n}] =$$

$$= L[\theta(x_1)\, e^{\lambda_1 x_1}]\, L[\theta(x_2)\, e^{\lambda_2 x_2}] \ldots L[\theta(x_n)\, e^{\lambda_n x_n}] =$$

$$= \frac{1}{(p_1 - \lambda_1)(p_2 - \lambda_2) \ldots (p_n - \lambda_n)}, \tag{1.5.92}$$

pentru $\operatorname{Re} p_j > \operatorname{Re} \lambda_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Observînd că

$$L[\theta(x) \sin x] = \frac{1}{1 + p^2}, \quad L[\theta(x) \cos x] = \frac{p}{1 + p^2} \tag{1.5.93}$$

şi ţinînd seama de relaţia

$$\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2,$$

se poate arăta că

$$L[\theta(x_1, x_2) \sin(x_1 + x_2)] = \frac{p_1 + p_2}{(1 + p_1^2)(1 + p_2^2)}, \ \operatorname{Re} p_1, \operatorname{Re} p_2 > 0. \tag{1.5.94}$$

Scanned with OKEN Scanner

Teorema derivării funcției imagine capătă forma

$$\frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_n}}{\partial p_1^{k_1}\partial p_2^{k_2}\ldots\partial p_n^{k_n}} L(p_1, p_2, \ldots, p_n) =$$

$$= L[(-x_1)^{k_1}(-x_2)^{k_2}\ldots(-x_n)^{k_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)]. \tag{1.5.95}$$

Considerînd în formula (1.5.88) $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$, obținem *transformata Laplace iterată*, definită prin relația

$$\bar{L}[f(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = \bar{L}(p) =$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, e^{-p(x_1+x_2+\ldots+x_n)}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n, \tag{1.5.96}$$

în aceleași condiții ca și transformata Laplace generală. Vom avea, de exemplu,

$$\bar{L}[\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = \frac{1}{p^n}; \tag{1.5.97}$$

evident, alte transformări Laplace generale se particularizează în mod analog.

În ceea ce privește imaginea derivatei unei funcții original de mai multe variabile, putem scrie

$$L\left[\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right] = p_i\, L[f(x_1, x_2, \ldots, x_n)] -$$

$$- L[f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)], \tag{1.5.98}$$

unde $L[f(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ este transformata Laplace în R^n, iar $L[f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)]$ este transformata Laplace în R^{n-1}.

De exemplu,

$$L\left[\frac{\partial}{\partial x_2} e^{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}\right] = p_2\, L[e^{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}] - L[e^{\lambda_1 x_1}] =$$

$$= \frac{p^2}{(p_1 - \lambda_1)(p_2 - \lambda_2)} - \frac{1}{p_1 - \lambda_1} = \frac{\lambda_2}{(p_1 - \lambda_1)(p_2 - \lambda_2)},$$

$$\operatorname{Re} p_1 > \operatorname{Re} \lambda_1,\ \operatorname{Re} p_2 > \operatorname{Re} \lambda_2,$$

relație ce se poate obține și direct.

Scanned with OKEN Scanner

Definiția 1.5.5. Dacă $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K'$ este o distribuție cu suportul în domeniul $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0$ și astfel încît produsul $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, e^{-(p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n)}$ este o distribuție temperată, atunci

$$L[f(x)] = (f(x),\ e^{-(p,x)}),\quad x \in R^n, \tag{1.5.99}$$

unde produsul scalar (p, x) este dat de (1.5.88''), reprezintă *transformata Laplace* a acestei distribuții.

1.5.2.4. Proprietăți. Aplicații

Ca și în cazul transformatei Laplace a unei distribuții de o singură variabilă, putem scrie

$$L[f(k_1x_1, k_2x_2, \ldots, k_nx_n)] =$$

$$= \frac{1}{k_1k_2\ldots k_n} L\left(\frac{p_1}{k_1}, \frac{p_2}{k_2}, \ldots, \frac{p_n}{k_n}\right),\ k_i > 0,\ (i = 1,2,\ldots,n), \tag{1.5.100}$$

$$L[f(x_1 - a_1, x_2 - a_2, \ldots, x_n - a_n)] =$$

$$= e^{-(p_1a_1 + p_2a_2 + \cdots + p_na_n)} L[f(x_1, x_2, \ldots, x_n)], \tag{1.5.101}$$

$$L\left[\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right] = p_i\, L[f(x_1, x_2, \ldots, x_n)]. \tag{1.5.102}$$

Observăm că

$$L[\delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)] =$$

$$= (\delta(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ e^{-(p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n)}) = e^0 = 1; \tag{1.5.103}$$

deci

$$L[\delta(k_1x_1, k_2x_2, \ldots, k_nx_n)] = \frac{1}{k_1k_2\ldots k_n};\quad k_i > 0,$$

$$(i = 1,2,\ldots,n), \tag{1.5.104}$$

$$L[\delta(x_1 - a_1, x_2 - a_2, \ldots, x_n - a_n)] = e^{-(p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n)}, \tag{1.5.105}$$

$$L\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right] = p_i. \tag{1.5.106}$$

Scanned with OKEN Scanner

Putem scrie și transformata Laplace iterată

$$\bar{L}(\delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = 1.$$

Pentru transformata Laplace a derivatei de un ordin oarecare a unei distribuții de mai multe variabile, obținem

$$L\left[\frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_n^{k_n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right] =$$

$$= p_1^{k_1} p_2^{k_2}\ldots p_n^{k_n}\, L[f(x_1, x_2, \ldots, x_n)]. \quad (1.5.107)$$

În particular, rezultă

$$L\left[\frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_n^{k_n}} \delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right] = p_1^{k_1} p_2^{k_2}\ldots p_n^{k_n}. \quad (1.5.108)$$

Să considerăm acum formula (1.4.16) de derivare a unei funcții $f(x) \in C^1$, $x \in R^n$, cu excepția unei hipersuprafețe S, cu $n-1$ dimensiuni, unde funcția are o discontinuitate de prima speță; aplicînd transformata Laplace, obținem

$$L\left[\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right] = L\left[\frac{\tilde{\partial}}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right] +$$

$$+ L[s_i \cos(n, x_i)\delta(S)]. \quad (1.5.109)$$

Deoarece funcția original $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$ numai pentru $x_i \geqslant 0$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, hiperplanele de discontinuitate sînt $x_i = 0$, astfel încît saltul în direcția Ox_i este $s_i = f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}\, 0,\, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, iar $\cos(n, x_i) = 1$; regăsim astfel formula (1.5.98). De exemplu,

$$L\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\theta(x_1, x_2)\right] = p_1 L[\theta(x_1, x_2)] = \frac{p_1}{p_1 p_2} = \frac{1}{p_2}. \quad (1.5.110)$$

Formula (1.5.84), privind produsul de convoluție, se menține și în cazul mai multor variabile.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul unei distribuţii $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n variabile, cu suport mărginit, conţinut în domeniul $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0$, transformata Laplace va fi definită de relaţia

$$L(p_1, p_2, \ldots, p_n) = (f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ e^{-(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n)}),$$
$$\operatorname{Re} p_j > a_j, \qquad (1.5.111)$$

unde $p_j = u_j + iv_j$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$; transformata Fourier a acestei distribuţii este

$$F(s_1, s_2, \ldots, s_n) = (f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ e^{i(s_1 x_1 + s_2 x_2 + \cdots + s_n x_n)}), \qquad (1.5.112)$$

unde $s_j = u_j + iv_j$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Observăm că

$$L(-is_1, -is_2, \ldots, -is_n) = F(s_1, s_2, \ldots, s_n). \qquad (1.5.113)$$

De asemenea, pentru aceste distribuţii putem scrie

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \lim_{v_j \to +0} F(s_1, s_2, \ldots, s_n) =$$

$$= \lim_{v_j \to +0} L(-is_1, -is_2, \ldots, -is_n), \ (j = 1, 2, \ldots, n), \qquad (1.5.114)$$

formulă cu multe aplicaţii practice.

1.6. Formule utile

1.6.1. *Derivate ale unor distribuţii uzuale*

1.6.1.1. Distribuţii de o singură variabilă

Pentru cazul $x \in R$ putem scrie

$$\theta'(x) = \delta(x), \ \theta'(-x) = -\delta(x); \qquad (1.6.1)$$

$$(x_+)' = \theta(x), \ (x_-)' = -\theta(-x); \qquad (1.6.2)$$

$$(x_+^\lambda)' = \lambda x_+^{\lambda-1}, \ (x_-^\lambda)' = -\lambda x_-^{\lambda-1}, \ \lambda \notin Z_-; \qquad (1.6.3)$$

Scanned with OKEN Scanner

$$(\theta(x)\cos x)' = \delta(x) - \theta(x)\sin x,$$
$$(\theta(x)\sin x)' = \theta(x)\cos x; \tag{1.6.4}$$

$$x^p\delta^{(n)}(x) = 0,\ p \in N_0;\ n = 0,1,2,\ldots,p-1;$$
$$x\delta^{(n)}(x) = -n\delta^{(n-1)}(x),\ n \in N_0; \tag{1.6.5}$$
$$x^n\delta^{(n)}(x) \in (-1)^n n!\,\delta(x),\ n \in N;$$

$$|x|' = 2\theta(x) - 1 = \operatorname{sgn} x,\ (\operatorname{sgn} x)' = 2\delta(x); \tag{1.6.6}$$

$$h(x) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } |x| \leqslant a \\ 0 \text{ pentru } |x| > a \end{cases} = \theta(x+a) - \theta(x-a) =$$
$$= \theta(a - |x|),\ a > 0, \tag{1.6.7}$$

$$h'(x) = \delta(x+a) - \delta(x-a) = -2x\delta(x^2 - a^2),\ a > 0;$$

$$(\ln|x|)' = \operatorname{Vp}\frac{1}{x},\ \left(\operatorname{Vp}\frac{1}{x}\right)' = -\operatorname{Vp}\frac{1}{x^2}; \tag{1.6.8}$$

$$(x + i0)^\lambda = x_+^\lambda + e^{i\lambda\pi}x_-^\lambda,\ \lambda \notin Z_-,$$
$$\frac{d}{dx}(x+i0)^\lambda = \lambda(x+i0)^{\lambda-1},\ \lambda \neq 0; \tag{1.6.9}$$

$$(x - i0)^\lambda = x_+^\lambda + e^{-i\lambda\pi}x_-^\lambda,\ \lambda \notin Z_-,$$
$$\frac{d}{dx}(x-i0)^\lambda = \lambda(x-i0)^{\lambda-1},\ \lambda \neq 0; \tag{1.6.10}$$

$$\ln(x+i0) = \ln|x| + i\pi\theta(-x),$$
$$\frac{d}{dx}\ln(x+i0) = \operatorname{Vp}\frac{1}{x} - i\pi\delta(x) = \frac{1}{x+i0}; \tag{1.6.11}$$

$$\ln(x - i0) = \ln|x| - i\pi\theta(-x),$$
$$\frac{d}{dx}\ln(x-i0) = \operatorname{Vp}\frac{1}{x} + i\pi\delta(x) = \frac{1}{x-i0}; \tag{1.6.12}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}[(2n+1)\,\pi - x],\quad n \in N,$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2\pi} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n) = \frac{1}{2\pi}\left(-1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx}\right) = \tag{1.6.13}$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\,x,$$

$$f''(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta'(x - 2\pi n) = \frac{i}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx} = -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} n \sin x\,;$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } x \in [2n, 2n+1), \\ -1 \text{ pentru } x \in [2n+1, 2n+2), \end{cases} \quad n \in N, \tag{1.6.14}$$

$$f'(x) = 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n\,\delta(x - n).$$

Observăm că seriile de distribuţii (1.6.13) şi (1.6.14) corespund seriilor de distribuţii definite de formulele (1.2.51) şi (1.2.53); graficele respective vor fi similare cu cele date în figurile 1.16 şi 1.17.

1.6.1.2. Distribuţii de mai multe variabile

În cazul unor distribuţii de două variabile, putem scrie

$$\frac{\partial^2 \theta(x, y)}{\partial x\,\partial y} = \delta(x, y)\,; \tag{1.6.15}$$

$$\Delta \ln \frac{1}{r} = -2\pi\,\delta(x, y),\quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{1.6.16}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{1}{r} = -\frac{x}{r^2},\quad \Delta\left(\frac{x}{r^2}\right) = 2\pi\frac{\partial}{\partial x}\,\delta(x, y)\,;$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{1}{z}\right) = \pi\,\delta(x, y),\quad z = x + iy,\quad \bar{z} = x - iy\,; \tag{1.6.17}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$E(x;t) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } |x| \leqslant t, \\ 0 \text{ pentru } |x| > t, \end{cases} \quad t > 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E(x;t) = \delta(x+t) - \delta(x-t), \quad t > 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E(x;t) = \delta(x+t) + \delta(x-t), \quad t > 0, \tag{1.6.18}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} E(x;t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} E(x;t) = \delta'(x+t) - \delta'(x-t), \quad t > 0;$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \theta(t)\, \theta(at - |x|) = 2a\, \delta(x;t). \tag{1.6.19}$$

În mod analog, în cazul unor distribuții de trei variabile, menționăm

$$\Delta \frac{1}{R} = -4\pi\, \delta(x,y,z), \quad R = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

$$\Delta\left(\frac{x^2}{R^3}\right) = \frac{2}{R^5}(R^2 - 3x^2) - \frac{4\pi}{3}\delta(x,y,z). \tag{1.6.20}$$

1.6.2. *Transformate Fourier ale unor distribuții uzuale*

1.6.2.1. **Distribuții de o singură variabilă**

Pentru cazul $x \in R$ putem scrie

$$F([1(x)] = 2\pi\delta(u),$$

$$F[\delta(x)] = 1, \quad F[\delta(x-a)] = e^{iua}, \tag{1.6.21}$$

$$F[\delta(kx)] = \frac{1}{|k|};$$

$$F[\delta'(x)] = -iu, \quad F[\delta^{(n)}(x)] = (-iu)^n,$$

$$F[\delta^{(2n)}(x)] = (-1)^n u^{2n}, \tag{1.6.22}$$

$$F[\delta^{(2n+1)}(x)] = (-1)^{n+1} iu^{2n+1};$$

$$F[\theta(x)] = \frac{\mathrm{i}}{u + \mathrm{i}0} = \pi\delta(u) + \mathrm{i}\,\mathrm{Vp}\frac{1}{u} = 2\pi\delta_+(u), \tag{1.6.23}$$

$$F[\theta(-x)] = -\frac{\mathrm{i}}{u - \mathrm{i}0} = \pi\delta(u) - \mathrm{i}\,\mathrm{Vp}\frac{1}{u} = 2\pi\delta_-(u), \tag{1.6.23'}$$

$$F[\theta(a - |x|)] = 2\frac{\sin au}{u}, \quad a > 0; \tag{1.6.23''}$$

$$F[x_+] = -\frac{1}{(u + \mathrm{i}0)^2} = -\mathrm{Vp}\frac{1}{u^2} - \mathrm{i}\pi\delta'(u), \tag{1.6.24}$$

$$F[x_-] = -\frac{1}{(u - \mathrm{i}0)^2} = -\mathrm{Vp}\frac{1}{u^2} + \mathrm{i}\pi\delta'(u);$$

$$F[x_+^n] = \frac{n!\,\mathrm{i}^{n+1}}{(u + \mathrm{i}0)^{n+1}} = \mathrm{i}^{n+1}\left[n!\,\mathrm{Vp}\frac{1}{u^{n+1}} + (-1)^{n+1}\,\mathrm{i}\pi\,\delta^{(n)}(u)\right], \quad n \in N, \tag{1.6.25}$$

$$F[x_-^n] = \frac{n!\,\mathrm{i}^{n+1}}{(u - \mathrm{i}0)^{n+1}} = \mathrm{i}^{n+1}\left[n!\,\mathrm{Vp}\frac{1}{u^{n+1}} - (-1)^{n+1}\,\mathrm{i}\pi\,\delta^{(n)}(u)\right], \quad n \in N;$$

$$F[x] = -2\,\mathrm{i}\pi\delta'(u), \quad F[|x|] = -2\,\mathrm{Vp}\frac{1}{u^2}; \tag{1.6.26}$$

$$F\left[\mathrm{Vp}\frac{1}{x}\right] = \mathrm{i}\pi\,\mathrm{sgn}\,u, \quad F[\mathrm{sgn}\,x] = 2\,\mathrm{i}\,\mathrm{Vp}\frac{1}{u}; \tag{1.6.27}$$

$$F[x^{2n}] = (-1)^n\,2\pi\,\delta^{(2n)}(u), \tag{1.6.28}$$

$$F[x^{2n}\,\mathrm{sgn}\,x] = 2\,\mathrm{i}\,(-1)^n\,(2n)!\,\mathrm{Vp}\frac{1}{u^{2n+1}};$$

Scanned with OKEN Scanner

$$F[x^n] = 2(-\mathrm{i})^n \pi \delta^{(n)}(u),$$

$$F\left[\mathrm{Vp}\frac{1}{x^n}\right] = \frac{\mathrm{i}^n}{(n-1)!}\pi u^{n-1}\operatorname{sgn} u, \quad n \in N_0, \tag{1.6.29}$$

$$F\left[\mathrm{Vp}\frac{1}{x^2}\right] = -\pi |u|;$$

$$F\left[\mathscr{P}\frac{1}{|x|}\right] = -2C - 2\ln|u|, \tag{1.6.30}$$

unde C este *constanta lui Euler*:

$$C = \int_0^1 \frac{1-\cos\alpha}{\alpha}\,\mathrm{d}\alpha - \int_1^\infty \frac{\cos\alpha}{\alpha}\,\mathrm{d}\alpha = 0{,}57721566490\ldots;$$

$$F[\sin ax] = \mathrm{i}\pi[\delta(s-a) - \delta(s+a)], \tag{1.6.31}$$

$$F[\cos ax] = \pi[\delta(s-a) + \delta(s+a)]; \tag{1.6.31'}$$

$$F[\operatorname{sh} ax] = \pi[\delta(s-\mathrm{i}a) - \delta(s+\mathrm{i}a)], \tag{1.6.32}$$

$$F[\operatorname{ch} ax] = \pi[\delta(s-\mathrm{i}a) + \delta(s+\mathrm{i}a)]; \tag{1.6.32'}$$

$$F[\mathrm{e}^{-a|x|}] = \frac{2a}{a^2+u^2}, \quad F\left[\frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+x^2}\right] = \mathrm{e}^{-a|u|}, \; a>0; \tag{1.6.33}$$

$$F\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\right] = 2K_0(au), \; a>0, \tag{1.6.34}$$

unde K_0 este *funcția lui Bessel modificată de speța a doua și de ordinul zero*;

$$F[\theta(x)\,\mathrm{e}^{-ax}] = \frac{1}{a-\mathrm{i}u}, \quad a>0, \tag{1.6.35}$$

$$F[\theta(-x)\,\mathrm{e}^{-a|x|}] = \frac{1}{a+\mathrm{i}u}, \; a>0;$$

Scanned with OKEN Scanner

$$F\left[e^{-a^2x^2}\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{u^2}{4a^2}}, \qquad a > 0. \tag{1.6.36}$$

1.6.2.2. Distribuţii de mai multe variabile

În cazul unor distribuţii de două variabile, putem scrie

$$F\left[\ln \frac{1}{r}\right] = \frac{2\pi}{\sigma_2^2}, \tag{1.6.37}$$

cu $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\sigma_2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$;

$$F\left[\mathrm{Vp}\,\frac{1}{r^2}\right] = 4\pi \ln \frac{1}{\sigma_2} - 2\pi C_0, \tag{1.6.38}$$

unde C_0 este o constantă, dată de

$$C_0 = \int_0^1 \frac{1 - J_0(\alpha)}{\alpha}\,d\alpha - \int_1^\infty \frac{J_0(\alpha)}{\alpha}\,d\alpha,$$

J_0 fiind *funcţia lui Bessel de indice zero*;

$$F\left[\frac{x}{x^2 + k^2 y^2}\right] = 2\pi i \frac{k u_1}{k^2 u_1^2 + u_2^2}, \; k > 0, \tag{1.6.39}$$

$$F\left[\frac{x}{r^2}\right] = 2\pi i \frac{u_1}{\sigma_2^2}, \; F\left[\frac{xy^2}{r^4}\right] = \pi i \frac{u_1 (u_1^2 - u_2^2)}{\sigma_2^4};$$

$$F\left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + k^2}}\right] = \frac{2\pi}{\sigma_2} e^{-k\sigma_2}, \quad k > 0; \tag{1.6.40}$$

$$F\left[\frac{\theta(a - r)}{\sqrt{a^2 - r^2}}\right] = \frac{2\pi}{\sigma_2} \sin a\sigma_2, \quad a > 0; \tag{1.6.41}$$

$$F\left[K_0(kr)\right] = \frac{2\pi}{\sigma_2^2 + k^2}, \quad \mathrm{Re}\, k > 0. \tag{1.6.42}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru distribuţii de trei variabile, menţionăm transformatele Fourier

$$F[\delta(R-a)] = 4\pi \frac{a}{\sigma_3} \sin a\sigma_3, \tag{1.6.43}$$

cu $R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\sigma_3 = \sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}$;

$$F\left[\frac{1}{R}\right] = \frac{4\pi}{\sigma_3^2}, \tag{1.6.44}$$

$$F\left[\frac{x}{R}\right] = 8\pi i \frac{u_1}{\sigma_3^4}, \; F\left[\frac{1}{R^3}\right] = \frac{2\pi^2}{\sigma_3}; \tag{1.6.44'}$$

$$F[e^{-a^2r^2}] = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{a}\right)^3 e^{-\frac{\sigma_3^2}{4a^2}}, \; a>0. \tag{1.6.45}$$

În mod analog, în cazul unor distribuţii de n variabile, putem scrie

$$F[1(x_1,x_2,\ldots,x_n)] = (2\pi)^n \delta(u_1,u_2,\ldots,u_n),$$
$$F[\delta(x_1,x_2,\ldots,x_n)] = 1, \tag{1.6.46}$$

$$F[\delta(x_1-a_1, x_2-a_2,\ldots,x_n-a_n)] = e^{i(a_1u_1+a_2u_2+\ldots+a_nu_n)},$$

$$F[\delta(k_1x_1,k_2x_2,\ldots,k_nx_n)] = \frac{1}{|k_1k_2\ldots k_n|};$$

$$F\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\delta(x_1,x_2,\ldots,x_n)\right] = -iu_j \; (j=1,2,\ldots,n), \tag{1.6.47}$$

$$F[x_j] = -2\pi i \frac{\partial}{\partial x_j}\delta(x_1,x_2,\ldots,x_n) \; (j=1,2,\ldots,n).$$

1.6.3. *Transformate Laplace ale unor distribuţii uzuale*

1.6.3.1. Distribuţii de o singură variabilă

Pentru cazul $x \in R$ putem scrie

$$L[\theta(x)] = \frac{1}{p}, \; L[\theta(x-a)] = \frac{1}{p} e^{-ap}, \; \mathrm{Re}\, p > 0, \tag{1.6.48}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$L[\delta(x)] = 1,\ L[\delta(x-a)] = e^{-ap},$$

$$L[\delta(kx)] = \frac{1}{|k|}; \tag{1.6.49}$$

$$L[\delta^{(n)}(x)] = p^n; \tag{1.6.50}$$

$$L[x_+^n] = (-1)^n \left(\frac{1}{p}\right)^{(n)} = \frac{n!}{p^{n+1}},\ \operatorname{Re} p > 0, \tag{1.6.51}$$

$$L[(x-a)_+] = \frac{1}{p^2} e^{-ap},\ L[(x-a)_+^2] = \frac{2}{p^3} e^{-ap},\ \operatorname{Re} p > 0;$$

$$L[\delta(x+a) + \delta(x-a)] = 2 \operatorname{ch} ap,\ \operatorname{Re} p > 0,$$
$$L[\delta(x+a) - \delta(x-a)] = 2 \operatorname{sh} ap,\ \operatorname{Re} p > 0; \tag{1.6.52}$$

$$L[\delta(a^2x^2 - b^2)] = \frac{1}{|ab|} \operatorname{ch} \frac{b}{a} p;$$

$$L[\delta(\sin x)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n p}; \tag{1.6.53}$$

$$L[\theta(x) e^{\lambda x}] = \frac{1}{p-\lambda},\ \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \lambda, \tag{1.6.54}$$

$$L[\theta(x)\, e^{i\omega x}] = \frac{1}{p - i\omega},\ L[\theta(x)\, e^{-i\omega x}] = \frac{1}{p + i\omega},\ \operatorname{Re} p > 0; \tag{1.6.54'}$$

$$L[\theta(x) \cos \omega x] = \frac{p}{p^2 + \omega^2},\ \operatorname{Re} p > 0, \tag{1.6.55}$$

$$L[\theta(x) \sin \omega x] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2},\ \operatorname{Re} p > 0; \tag{1.6.55'}$$

$$L[\theta(x) \operatorname{ch} ax] = \frac{p}{p^2 - a^2},\ \operatorname{Re} p > |\operatorname{Re} a|, \tag{1.6.56}$$
$$L[\theta(x) \operatorname{sh} ax] = \frac{a}{p^2 - a^2},\ \operatorname{Re} p > |\operatorname{Re} a|;$$

$$L[\theta(x) J_0(x)] = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}},\ \operatorname{Re} p > 0, \tag{1.6.57}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde J_0 este funcţia lui Bessel de indice zero ;

$$L\left[\theta(x)\,\theta(x-a)\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\right]=\frac{1}{p}K_0(ap),\ a>0,$$

$$L\left[\frac{\theta(x)\,\theta(x-a)}{\sqrt{x^2-a^2}}\right]=K_0(ap),\ a>0, \tag{1.6.58}$$

$$L\left[\frac{\theta(x)\ \theta(x-a)}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}\right]=-\,p\,K_0(ap),\ a>0,$$

unde K_0 este funcţia lui Bessel modificată de speţa a doua şi de ordinul zero.

1.6.3.2. Distribuţii de mai multe variabile

Pentru distribuţiile de trei sau patru variabile, menţionăm transformatele Laplace

$$L\left[\frac{1}{R}\right]=-\frac{4\pi}{\rho_3^2},\ \operatorname{Re}\rho_3=0, \tag{1.6.59}$$

unde $R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\rho_3=\sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2}$;

$$L\left[\delta(a-R)\right]=\frac{4\pi a}{\rho_3}\operatorname{sh}a\rho_3, \tag{1.6.60}$$

$$L\left[\frac{\cos kR}{R}\right]=-\frac{4\pi}{\rho_3^2+k^2},\ \operatorname{Re}\rho_3=0,\ \operatorname{Im}k=0, \tag{1.6.61}$$

$$L\left[\frac{\delta(t-R)}{R}\right]=-\frac{4\pi}{\rho_3^2-q^2},\ \operatorname{Re}q>|\operatorname{Re}\rho_3|. \tag{1.6.62}$$

În mod analog, în cazul unor distribuţii de n variabile, putem scrie

$$L\left[\theta(x_1,x_2,\ldots,x_n)\right]=\frac{1}{p_1\,p_2\ldots p_n},\ \operatorname{Re}p_i>0, \tag{1.6.63}$$

$$(i=1,2,\ldots,n)\,;$$

Scanned with OKEN Scanner

$$L\,[\delta(x_1,\, x_2, \ldots,\; x_n)] = 1,$$

$$L\,[\delta(x_1 - a_1,\; x_2 - a_2, \ldots,\; x_n - a_n)] = \mathrm{e}^{-(a_1 p_1 + a_2 p_2 + \ldots + a_n p_n)}, \tag{1.6.64}$$

$$L\,[\delta(k_1 x_1,\, k_2 x_2, \ldots,\, k_n x_n)] = \frac{1}{|k_1 k_2 \ldots k_n|};$$

$$L\left[\frac{1}{r_n}\,\mathrm{e}^{ikr_n}\right] = -\frac{1}{\rho_n^2 + k^2},\quad \mathrm{Im}\;k > |\mathrm{Re}\;\rho_n|, \tag{1.6.65}$$

cu $r_n = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$, $\rho_n = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2}$.

Scanned with OKEN Scanner

ECUAȚII DIFERENȚIALE ÎN DISTRIBUȚII

2.1. Ecuații diferențiale ordinare

2.1.1. *Rezultate generale. Soluții fundamentale*

Studiul ecuațiilor diferențiale în spațiul distribuțiilor diferă de studiul aceloraşi ecuații pentru care se consideră operatori obișnuiți și funcții obișnuite. Stabilirea acestor ecuații, precum și găsirea soluțiilor lor prezintă o importanță deosebită pentru aplicații; într-adevăr, rezolvarea ecuațiilor diferențiale în distribuții ne permite să determinăm soluții noi, care nu pot fi găsite cu mijloace clasice.

Trebuie să observăm că deducerea unor ecuații ale fizicii matematice nu se poate realiza totdeauna direct în spațiul distribuțiilor, din cauza dificultăților care se întîlnesc în modelarea fenomenelor fizice. În general, ecuațiile care descriu asemenea fenomene se deduc întîi în mod clasic. După aceea, se efectuează o prelungire cu valori nule a funcțiilor necunoscute, astfel încît acestea să fie definite în tot spațiul; derivatele, considerate în sens obișnuit, se înlocuiesc cu expresii corespunzătoare, date de relația de legătură dintre derivata în sensul teoriei distribuțiilor și derivata în sens obișnuit a unei funcții continue aproape peste tot, avînd un număr finit de puncte de discontinuitate de prima speță. În felul acesta, necunoscutele problemei vor fi distribuții regulate; se admite apoi că aceste necunoscute pot fi distribuții oare-

Scanned with OKEN Scanner

care. O altă posibilitate, des folosită, este aceea de a considera de la început că necunoscutele problemei sînt distribuţii oarecare, admiţînd aceeaşi formă — în distribuţii — pentru ecuaţiile diferenţiale, obţinute prin metode clasice (evident, acestea nu mai sînt valabile pentru tot spaţiul). O metodă generală de trecere la ecuaţii diferenţiale în distribuţii nu poate fi însă indicată.

2.1.1.1. Funcţii fundamentale

Să determinăm întîi cîteva proprietăţi ale funcţiilor fundamentale, proprietăţi utile în studiul ecuaţiilor diferenţiale.

Fie $H(R)$ subspaţiul din $K(R)$, $H \subset K$, care cuprinde funcţiile fundamentale $\chi(x) \in H(R)$ ce verifică relaţia

$$\chi(x) = \varphi'(x), \quad \varphi \in K. \tag{2.1.1}$$

Observăm că acest subspaţiu este caracterizat de faptul că orice element al său verifică relaţia

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi(x)\,dx = 0. \tag{2.1.2}$$

Fie $\psi(x) \in K(R)$ o funcţie fundamentală oarecare, iar

$$\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\,dx \tag{2.1.3}$$

o constantă corespunzătoare ; fie de asemenea, $\varphi_0(x) \in K(R)$ o funcţie fundamentală, fixată prin proprietatea

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x)\,dx = 1. \tag{2.1.4}$$

Teorema 2.1.1. *Orice funcţie fundamentală* $\psi(x) \in K(R)$ *poate fi scrisă în mod unic sub forma*

$$\psi(x) = \chi(x) + \lambda\varphi_0(x), \quad \chi(x) \in H(R). \tag{2.1.5}$$

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, $\varphi_0(x)$ este fixat, λ se determină prin relaţia (2.1.3.), iar funcţia $\chi(x)$ este determinată de relaţia (2.1.5); rezultă

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\,dx - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x)\,dx = 0,$$

deci funcţia $\chi(x) \in H(R)$ este indefinit derivabilă şi cu suport compact.

Acest rezultat se poate extinde şi la cazul unor funcţii fundamentale de mai multe variabile. Fie astfel $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K(R^n)$ o funcţie fundamentală definită pe R^n şi $\lambda(x_2, x_3, \ldots, x_n) \in K(R^{n-1})$ o funcţie fundamentală asociată, definită prin relaţia

$$\lambda(x_2, x_3, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1,\ \psi \in K(R^n). \tag{2.1.6}$$

De asemenea, fie $\varphi_0(x_1) \in K(R)$ o funcţie fundamentală fixată, de o variabilă, avînd proprietatea

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x_1)\,dx_1 = 1. \tag{2.1.7}$$

Vom nota cu $H_1(R^n)$ subspaţiul din $K(R^n)$, $H_1 \subset K$, care cuprinde funcţiile fundamentale $\chi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ avînd proprietatea

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1 = 0; \tag{2.1.8}$$

orice element al acestui subspaţiu este de forma

$$\chi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \varphi \in K(R^n), \tag{2.1.9}$$

deci

$$\varphi(x_1, x_2 \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \chi(\xi_1, x_2, \ldots, x_n)\,d\xi_1.$$

Teorema 2.1.1'. *Orice funcție fundamentală* $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K(R^n)$ *poate fi scrisă în mod unic sub forma*

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \chi(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda(x_2, x_3, \ldots, x_n)\varphi_0(x_1), \quad \chi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in H_1(R^n). \tag{2.1.10}$$

Într-adevăr, funcția $\chi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, precizată de relația (2.1.10), este fundamentală și verifică relația (2.1.8), deci aparține spațiului $H_1(R^n)$.

2.1.1.2. Primitiva unei distribuții

Definiția 2.1.1. Spunem că distribuția $g(x) \in K'(R)$ este o *primitivă de ordinul m a distribuției* $f(x) \in K'(R)$, dacă

$$g^{(m)}(x) = f(x), \tag{2.1.11}$$

adică

$$(g^{(m)}(x), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(x)), \tag{2.1.11'}$$

pentru orice $\varphi(x) \in K(R)$.

În particular, dacă $m = 1$, atunci $g(x)$ este o *primitivă de ordinul întîi* sau *primitiva distribuției* $f(x)$.

Teorema 2.1.2. *Orice distribuție* $f(x) \in K'(R)$ *posedă o primitivă* $g(x) \in K'(R)$. *Două primitive* $g_1(x), g_2(x)$ *diferă între ele printr-o constantă.*

Într-adevăr, fie $f(x) \in K'(R)$ distribuția dată și $\psi(x) \in K(R)$ o funcție fundamentală, scrisă sub forma (2.1.5). Definim funcționala $g(x)$ prin relația

$$(g(x), \psi(x)) = (g(x), \chi(x)) + \lambda(g(x), \varphi_0(x)) = (g(x), \varphi'(x)) + \lambda C = -(f(x), \varphi(x)) + \lambda C,$$

unde $C = (g(x), \varphi_0(x))$ este o constantă; se verifică ușor că funcționala $g(x)$ astfel definită este liniară și continuă, reprezentînd o distribuție. Pe de altă parte, putem scrie

$$(g(x), \psi'(x)) = -(g'(x), \psi(x)) = -(f(x), \overline{\varphi}(x)) + \overline{\lambda}C.$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$\bar{\lambda} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi'(x)\,dx = 0,\ \bar{\varphi} = \int_{-\infty}^{x} \bar{\chi}(\xi)\,d\xi =$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \psi'(\xi)\,d\xi = \psi(x);$$

deci

$$(g'(x),\ \psi(x)) = (f(x),\ \psi(x)) \qquad (2.1.12)$$

sau

$$g'(x) = f(x),$$

existența primitivei fiind astfel asigurată.

Fie acum $g_1(x)$ și $g_2(x)$ două primitive ale distribuției $f(x)$; pentru $\varphi(x) \in K(R)$, putem scrie

$$(g_1'(x),\ \varphi(x)) = (g_2'(x),\ \varphi(x)),\ \varphi \in K(R),$$

sau

$$([g_1(x) - g_2(x)]',\ \varphi(x)) = -(g_1(x) - g_2(x),\ \varphi'(x)) =$$

$$= -(g_1(x) - g_2(x),\ \chi(x)),\ \chi \in H.$$

Considerînd $\psi(x) \in K(R)$ sub forma (2.1.5), obținem

$$(g_1(x) - g_2(x),\ \psi(x)) = (g_1(x) - g_2(x),\ \chi(x)) +$$

$$+ \lambda(g_1(x) - g_2(x),\ \varphi_0(x)) = \lambda C = C\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\,dx = (C,\ \psi(x)),$$

unde $(g_1(x) - g_2(x),\ \varphi_0(x)) = C = \text{const}$; rezultă

$$g_1(x) - g_2(x) = C, \qquad (2.1.13)$$

teorema fiind astfel complet demonstrată.

Teorema 2.1.2′. *Orice distribuție $f(x) \in K'(R)$ admite primitive $g(x) \in K'(R)$ de un ordin oarecare m. Două primitive $g_1(x)$, $g_2(x)$ de același ordin m diferă între ele printr-un polinom de grad $m - 1$.*

Într-adevăr, existența unei distribuții $g(x)$, care verifică relația (2.1.11), se demonstrează prin metoda inducției complete, folosind rezultatele obținute în cazul $m = 1$, caz pentru care teorema este verificată. Admițînd că există o distribuție $h(x)$ pentru care $h^{(m-1)}(x) = f(x)$ și observînd că există o distribuție $g(x)$ pentru care $g'(x) = h(x)$, rezultă relația (2.1.11), existența primitivei de ordinul m fiind astfel asigurată.

Vom admite, de asemenea, că există două primitive $h_1(x)$, $h_2(x)$ de ordinul $m-1$, astfel încît

$$(h_1(x) - h_2(x),\ \varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{m-1}(x)\varphi(x)\,dx,$$

unde $P_{m-1}(x)$ este un polinom de grad $m-1$; ținînd seama de (2.1.1), putem scrie pentru primitivele $g_1(x) = h_1'(x)$, $g_2(x) = h_2'(x)$ relația

$$(g_1(x) - g_2(x),\ \chi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} P_m(x)\chi(x)\,dx,$$

unde am efectuat o integrare prin părți în membrul al doilea și unde $P_m(x)$ este un polinom de grad m. Ținînd seama de reprezentarea (2.1.5) a unei funcții fundamentale $\psi(x) \in K(R)$, rezultă

$$(g_1(x) - g_2(x),\ \psi(x)) = (g_1(x) - g_2(x),\ \chi(x)) +$$

$$+ \lambda(g_1(x) - g_2(x),\ \varphi_0(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} P_m(x)\chi(x)\,dx +$$

$$+ \lambda(g_1(x) - g_2(x),\ \varphi_0(x)) = \lambda(g_1(x) - g_2(x),\ \varphi_0(x)) -$$

$$- \lambda\int_{-\infty}^{\infty} P_m(x)\varphi_0(x)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} P_m(x)\psi(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P_m(x)\psi(x)\,dx + \lambda C = (P_m(x) + C,\ \psi(x)),\ C = \text{const},$$

de unde

$$g_1(x) - g_2(x) = P_m(x), \qquad (2.1.14)$$

constanta fiind înglobată în polinomul $P_m(x)$.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 2.1.3. *Orice distribuție* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K'(R^n)$ *posedă o primitivă* $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K'(R^n)$, *astfel încît*

$$\frac{\partial}{\partial x_1} g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{2.1.15}$$

Dacă $g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *sînt două primitive, vom avea*

$$g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) - g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = h(x_2, x_3, \ldots, x_n), \tag{2.1.16}$$

unde $h(x_2, x_3, \ldots, x_n) \in K'(R^{n-1})$.

Această teoremă se poate demonstra în mod analog; menționăm faptul că ea se poate generaliza pentru o primitivă de un ordin oarecare m, astfel încît

$$\frac{\partial^m g(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \ldots \partial x_n^{m_n}} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{2.1.17}$$

$$(m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n).$$

2.1.1.3. Rezultate generale

Ținînd seama de rezultatele obținute, putem afirma că ecuația diferențială

$$\frac{dy(x)}{dx} = 0 \tag{2.1.18}$$

admite numai soluția clasică

$$y(x) = C = \text{const.}$$

Ecuația diferențială

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x), \tag{2.1.19}$$

considerată în sensul teoriei distribuțiilor, unde $f(x)$ este o distribuție arbitrară, admite totdeauna o soluție. În cazul în care $f(x)$ este o distribuție de tip funcție, se ob-

Scanned with OKEN Scanner

servă că avem totdeauna o primitivă care este tot o distribuţie de tip funcţie ; în baza teoremei 2.1.2, toate primitivele vor fi distribuţii de tip funcţie.

Teorema 2.1.4. *Ecuaţia* (2.1.19), *considerată în sensul teoriei distribuţiilor, cu* $f(x)$ *o funcţie, nu admite o altă soluţie în afara soluţiei clasice*

$$y(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Observăm că este posibil ca pentru $f(x)$ o distribuţie singulară să obţinem o primitivă care să fie o distribuţie de tip funcţie. De exemplu, pentru $f(x) = \delta(x)$ obţinem $y = \theta(x)$. De asemenea, dacă $f(x)$ este o distribuţie de tip funcţie, primitiva poate fi o funcţie continuă. De exemplu, pentru $f(x) = \theta(x)$ obţinem $y(x) = x_+$; în general, putem scrie

$$y(x) = x_+ + C = x\theta(x) + C, \quad C = \text{const.} \tag{2.1.20}$$

Dacă am fi plecat de la ecuaţia

$$y''(x) = \delta(x), \tag{2.1.21}$$

rezulta, în baza teoremei 2.1.2′,

$$y(x) = x_+ + C + C_1 x, \quad C, C_1 = \text{const.}$$

Să considerăm sistemul de ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi, omogen, scris sub formă normală

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y_1(x)}{\mathrm{d}x} &= a_{11}(x)y_1(x) + a_{12}(x)y_2(x) + \ldots + a_{1n}(x)y_n(x),\\
\frac{\mathrm{d}y_2(x)}{\mathrm{d}x} &= a_{21}(x)y_1(x) + a_{22}(x)y_2(x) + \ldots + a_{2n}(x)y_n(x),
\end{aligned} \tag{2.1.22}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\mathrm{d}y_n(x)}{\mathrm{d}x} = a_{n1}(x)y_1(x) + a_{n2}(x)y_2(x) + \ldots + a_{nn}(x)y_n(x),$$

Scanned with OKEN Scanner

unde coeficienţii $a_{ij}(x)$ sînt funcţii indefinit derivabile. Introducînd matricele

$$A \equiv (a_{ij}) \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}, \quad y \equiv \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \tag{2.1.23}$$

putem scrie acest sistem sub forma

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = A(x)\, y(x). \tag{2.1.22'}$$

Se ştie că există o matrice pătrată $U(x)$ nesingulară ($\det U \neq 0$), numită *matricea fundamentală a sistemului de ecuaţii* (2.1.22'), care reprezintă soluţia clasică a acestui sistem, deci pentru care putem scrie

$$\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x} = A(x)U(x). \tag{2.1.22''}$$

Teorema 2.1.5. *Ecuaţia diferenţială matriceală* (2.1.22'), *pentru care elementele matricei* $A(x)$ *sînt funcţii indefinit derivabile, nu admite altă soluţie în afară de soluţia clasică.*

Într-adevăr, să presupunem că ar exista o soluţie în distribuţii $y(x) = U(x)\, z(x)$, unde $z(x)$ reprezintă o nouă matrice necunoscută. Derivînd, putem scrie

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x} z(x) + U(x) \frac{\mathrm{d}z(x)}{\mathrm{d}x}$$

şi, ţinînd seama de (2.1.22''), rezultă

$$U(x) \frac{\mathrm{d}z(x)}{\mathrm{d}x} = 0;$$

$U(x)$ fiind nesingulară, obţinem $\dfrac{\mathrm{d}z(x)}{\mathrm{d}x} = 0$, de unde $z(x) = C$, iar teorema este astfel demonstrată.

Fie acum ecuaţia diferenţială omogenă de ordinul n, cu coeficienţi variabili şi indefinit derivabili

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) y(x) \equiv y^{(n)}(x) + a_1(x) y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x) y(x) = 0; \tag{2.1.24}$$

Scanned with OKEN Scanner

notînd

$$y_i(x) = y^{(n-1)}(x), \quad (i = 1,2,\ldots,n), \tag{2.1.25}$$

se poate arăta că această ecuaţie este echivalentă cu un sistem de ecuaţii liniare de forma (2.1.22).

Teorema 2.1.6. *Ecuaţia diferenţială* (2.1.24), *omogenă, de ordinul n, cu coeficienţi variabili* $a_i(x) \in C^\infty$, $(i = 1,2,\ldots,n)$, *nu admite altă soluţie în afară de soluţia clasică.*

În particular, ecuaţia diferenţială

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0, \quad a(x) \in C^\infty, \tag{2.1.26}$$

considerată în sensul teoriei distribuţiilor, nu admite altă soluţie în afară de soluţia clasică

$$y(x) = C\, e^{-\int a(x)dx}, \quad C = \text{const.}$$

Dacă $y_1(x), y_2(x),\ldots,y_n(x)$ reprezintă un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia (2.1.24), atunci soluţia generală a acestei ecuaţii se scrie sub forma

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x), \tag{2.1.24}$$
$$C_i = \text{const}, \quad (i = 1, 2,\ldots,n);$$

wronskianul sistemului fundamental de soluţii este diferit de zero :

$$W(y_1, y_2,\ldots,y_n) \equiv \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{2.1.27'}$$

deoarece soluţiile sistemului sînt liniar independente. În acest caz, ecuaţia (2.1.24) se mai poate scrie sub forma remarcabilă

$$W(y_1, y_2,\ldots,y_n ; y) \equiv \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots y_n & y \\ y_1' & y_2' & \ldots y_n' & y' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0, \tag{2.1.28}$$

Scanned with OKEN Scanner

coeficineţii $a_i(x)$, $(i = 1,2,\ldots,n)$, ai ecuaţiei exprimîndu-se sub forma

$$a_i(x) = \frac{(-1)^i}{W(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-i-1)} & y_2^{(n-i-1)} & \ldots y_n^{(n-i-1)} \\ y_1^{(n-i+1)} & y_2^{(n-i+1)} & \ldots y_n^{(n-i+1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots y_n^{(n)} \end{vmatrix}. \tag{2.1.28'}$$

2.1.1.4. Soluţie generalizată. Soluţie fundamentală

Fie ecuaţia diferenţială liniară neomogenă, de ordinul n,

$$P\left(\frac{d}{dx}\right) y(x) = f(x),\ f(x) \in K'(R), \tag{2.1.29}$$

cu coeficienţii $a_i(x) \in C^\infty$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Definiţia 2.1.2. Numim *soluţie generalizată* a ecuaţiei diferenţiale (2.1.29) în intervalul $[a, b]$ o distribuţie $y(x) \in K'(R)$, care verifică această ecuaţie pe intervalul $[a, b]$, în sensul teoriei distribuţiilor, adică

$$\left(P\left(\frac{d}{dx}\right) y(x),\ \varphi(x)\right) = (f(x),\ \varphi(x)),$$

pentru orice $\varphi(x) \in K(R)$ cu supp $\varphi(x) \subset [a, b]$.

Teorema 2.1.7. *Dacă $f(x)$ este o funcţie continuă pe $[a, b]$, atunci ecuaţia (2.1.29) nu admite pe $[a, b]$ altă soluţie în afară de soluţia clasică.*

Scanned with OKEN Scanner

Definiția 2.1.3. Dacă coeficienții operatorului diferențial liniar $P\left(\frac{d}{dx}\right)$ din ecuația (2.1.29) sînt constanți, numim *soluție elementară* sau *soluție fundamentală* a ecuației (2.1.29) sau a operatorului $P\left(\frac{d}{dx}\right)$ corespunzător distribuția $E(x) \in K'(R)$, care satisface ecuația

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)E(x) = \delta(x). \tag{2.1.30}$$

Teorema 2.1.8. *Ecuația* (2.1.29) *cu coeficienți constanți admite o soluție de forma*

$$y(x) = E(x) * f(x), \tag{2.1.31}$$

dacă produsul de convoluție există.

De exemplu, această soluție corespunde cazului în care distribuția $f(x)$ are suport mărginit sau cazului în care soluția fundamentală se bucură de o asemenea proprietate.

Pentru demonstrarea acestei teoreme, ținem seama de formulele (1.3.20), (1.3.23), ceea ce ne permite să scriem

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)y(x) = P\left(\frac{d}{dx}\right)[E(x) * f(x)] =$$

$$= P\left(\frac{d}{dx}\right)E(x) * f(x) = \delta(x) * f(x) = f(x).$$

Observăm că există o infinitate de soluții fundamentale, care diferă între ele printr-o soluție a ecuației omogene

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)y(x) = 0. \tag{2.1.32}$$

O soluție particulară a ecuației (2.1.30) se va numi *soluție particulară fundamentală* și se va nota $E_+(x)$; soluția generală a ecuației omogene (2.1.32) se va nota $E_0(x)$. În acest caz, *soluția generală fundamentală* sau, pe scurt, *soluția fundamentală* va fi dată de

$$E(x) = E_0(x) + E_+(x), \tag{2.1.33}$$

verificarea fiind imediată.

Scanned with OKEN Scanner

Este interesant de observat că soluţia fundamentală în sensul teoriei distribuţiilor poate fi pusă în legătură cu *funcţiile Green* în cazul unor distribuţii de tip funcţie; într-adevăr, în acest caz funcţia Green se obţine printr-o translaţie a soluţiei fundamentale, fiind utilă în calculul produsului de convoluţie.

După cum folosim o soluţie particulară fundamentală sau soluţia fundamentală a ecuaţiei date, obţinem *o soluţie particulară* sau *soluţia generală* a acestei ecuaţii.

De exemplu, o soluţie particulară fundamentală a operatorului $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}$ este distribuţia

$$E_+(x) = \frac{1}{(n-1)!}\, x_+^{n-1} = \frac{\theta(x)}{(n-1)!}\, x^{n-1}. \qquad (2.1.34)$$

Pentru demonstrarea acestui rezultat, putem folosi metoda inducţiei complete. Formula (2.1.34) se verifică uşor pentru $n = 1$. Dacă E_n este soluţia corespunzătoare exponentului n, observăm că

$$E_{n+1}^{(n)} = \left(\theta(x)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{x}{n}\right)^{(n)} = \left(E_n\,\frac{x}{n}\right)^{(n)} = E_n^{(n)}\,\frac{x}{n} +$$

$$+ C_n^1 E_n^{(n-1)}\left(\frac{x}{n}\right)' + \ldots + C_n^n E_n\left(\frac{x}{n}\right)^{(n)} =$$

$$= \frac{x}{n}\,\delta(x) + \theta(x) = \theta(x),$$

aşa încît $E_{n+1}^{(n+1)} = \delta(x)$; formula (2.1.34) este astfel verificată.

În mod analog, distribuţia regulată

$$E(x) = \theta(x)\,\frac{\sin \omega x}{\omega}, \qquad \omega > 0, \qquad (2.1.35)$$

este soluţia fundamentală a operatorului $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \omega^2$; într-adevăr

$E'(x) = \theta(x)\cos \omega x$, $E''(x) = \delta(x) - \theta(x)\omega \sin \omega x$, verificarea fiind imediată.

Scanned with OKEN Scanner

De asemenea, distribuţia de tip funcţie

$$E(x) = -\frac{1}{2\omega} e^{-\omega|x|}, \quad \omega > 0, \tag{2.1.36}$$

este soluţia fundamentală a operatorului $\frac{d^2}{dx^2} - \omega^2$; această distribuţie este generată de o funcţie continuă

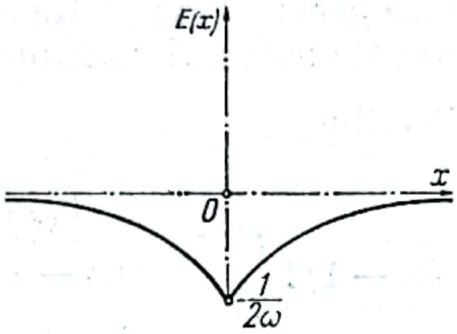


Fig. 2.1.

şi derivabilă peste tot, cu excepţia originii (fig. 2.1). Observînd că

$$E'(x) = \frac{1}{2} e^{-\omega|x|} \operatorname{sgn} x,$$

demonstraţia este imediată.

Aceşti operatori au multe aplicaţii în mecanică, în special în probleme de vibraţii.

2.1.2. *Metode de calcul*

2.1.2.1. Metoda variaţiei constantelor

Una dintre metodele clasice de integrare a ecuaţiilor diferenţiale liniare neomogene cu coeficienţi variabili este *metoda variaţiei constantelor*; această metodă poate fi aplicată şi în cazul în care ecuaţiile se consideră în spaţiul distribuţiilor.

Vom considera astfel ecuaţia

$$P\left(\frac{d}{dx}\right) y(x) = f(x), \quad f(x) \in K'(R), \tag{2.1.37}$$

operatorul $P\left(\frac{d}{dx}\right)$ fiind precizat de (2.1.24). Fie $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$, $x \in [a, b]$, un sistem fundamental de soluţii (soluţii particulare liniar independente) al ecuaţiei omogene (2.1.24), cu wronskianul (2.1.27) diferit de zero pe intervalul $[a, b]$. Pe de altă parte, ecuaţia (2.1.24) se poate scrie sub forma (2.1.28), coeficienţii ei fiind daţi de formula (2.1.28′).

Dacă admitem că coeficienţii $a_i(x)$ sînt indefinit derivabili şi dacă ţinem seama de formula (2.1.28′) şi de faptul că $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ admite o derivată, rezultă că wronskianul este indefinit derivabil pe $[a, b]$. Cu ajutorul sistemului fundamental de soluţii, soluţia generală a ecuaţiei omogene (2.1.24) se scrie sub forma (2.1.24′).

Folosind metoda variaţiei constantelor, vom căuta soluţia ecuaţiei neomogene (2.1.37) sub forma (2.1.24′), admiţînd că $C_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sînt distribuţii. Coeficienţii $C_i(x)$ vor fi precizaţi de sistemul de ecuaţii

$$\begin{aligned}
&C_1'(x)\, y_1(x) + C_2'(x)\, y_2(x) + \ldots + C_n'(x)\, y_n(x) = 0,\\
&C_1'(x)\, y_1'(x) + C_2'(x)\, y_2'(x) + \ldots + C_n'(x)\, y_n'(x) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2.1.38)\\
&C_1'(x)\, y_1^{(n-2)}(x) + C_2'(x) y_i^{(n-2)}(x) + \ldots + C_n'(x)\, y_n^{(n-2)}(x) = 0,\\
&C_1'(x) y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x) y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)\, y_n^{(n-1)}(x) = f(x);
\end{aligned}$$

determinantul acestui sistem fiind tocmai wronskianul $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$ pe $[a, b]$, putem scrie soluţia sa sub forma

$$C_i'(x) = \frac{A_i(x)}{W(x)} f(x), \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (2.1.38')$$

unde $A_i(x)$ reprezintă coeficienţii algebrici din wronskian, corespunzători ultimei linii şi coloanei i. Primitivele

Scanned with OKEN Scanner

acestor distribuţii ne permit să scriem soluţia generală a ecuaţiei (2.1.37) sub forma (2.1.24′).

Dacă $y^{(n)}(x)$ nu are coeficientul 1, atunci ultima ecuaţie (2.1.38) se modifică, membrul întîi fiind multiplicat cu acest coeficient; acest nou sistem nu are totdeauna determinantul diferit de zero, rezolvarea sa depinzînd de particularităţile pe care le are.

Putem folosi consideraţiile de mai sus pentru determinarea soluţiei fundamentale corespunzătoare operatorului $P\left(\frac{d}{dx}\right)$; astfel, dacă $f(x) = \delta(x)$, putem scrie

$$C_i'(x) = \frac{A_i(x)}{W(x)}\,\delta(x) = \frac{A_i(0)}{W(0)}\,\delta(x), \qquad (2.1.39)$$

de unde rezultă

$$C_i(x) = \frac{A_i(0)}{W(0)}\,\theta(x), \ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Soluţia particulară fundamentală se va exprima sub forma

$$E_+(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i(0)}{W(0)}\,\theta(x)\,y_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i(0)}{W(0)}\,y_{i+}(x), \qquad (2.1.40)$$

unde se pune în evidenţă partea pozitivă a funcţiilor $y_i(x)$, conform relaţiei de definiţie (1.3.26).

Dacă sistemul fundamental de soluţii este normal, adică

$$\begin{aligned}
&y_1(0) = 1, \ y_1'(0) = 0, \ldots, y_1^{(n-1)}(0) = 0,\\
&y_2(0) = 0, \ y_2'(0) = 1, \ldots, y_2^{(n-1)}(0) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2.1.41)\\
&y_{n-1}(0) = 0, \ y_{n-1}'(0) = 0, \ldots, y_{n-1}^{(n-1)}(0) = 0,\\
&y_n(0) = 0, \ y_n'(0) = 0, \ldots, y_n^{(n-1)}(0) = 1,
\end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

atunci $W(0) = 1$, $A_i(0) = 0$ $(i = 1,2,\ldots, n-1)$ și $A_n(0) = 1$, astfel încît

$$E_+(x) = \theta(x) y_n(x) = y_{n+}(x); \tag{2.1.42}$$

soluția generală a ecuației omogene se va scrie sub foorma

$$E_0(x) = y(0)\, y_1(x) + y'(0)\, y_2(x) + \ldots + y^{(n-1)}(0)\, y_n(x). \tag{2.1.43}$$

În particular, dacă $y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-2)}(0) = 0$, $y^{(n-1)}(0) = 1$, putem scrie

$$E_0(x) = y_n(x); \tag{2.1.44}$$

de aici rezultă că pentru determinarea soluției particulare fundamentale, putem pleca de la soluția $E_0(x)$ a ecuației omogene, care verifică condițiile inițiale

$$E_0(0) = 0,\ E_0'(0) = 0,\ \ldots,\ E_0^{(n-2)}(0) = 0,\quad E_0^{(n-1)}(0) = 1. \tag{2.1.44'}$$

Fie, de exemplu, ecuația

$$y^{(n)}(x) = f(x),\ f(x) \in K'(R); \tag{2.1.45}$$

soluția ecuației omogene corespunzătoare

$$y^{(n)}(x) = 0 \tag{2.1.46}$$

se scrie sub forma

$$E_0(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_n x^{n-1}.$$

Punînd condițiile (2.1.44'), obținem

$$E_0(x) = \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1},$$

regăsind astfel soluția particulară fundamentală (2.1.34).

Pentru ecuația diferențială

$$y''(x) - \omega^2 y(x) = f(x),\ f(x) \in K'(R), \tag{2.1.47}$$

Scanned with OKEN Scanner

putem scrie

$$E_0(x) = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}, \quad \omega > 0; \tag{2.1.48}$$

punînd condiţiile iniţiale $E_0(0) = 0$, $E_0'(0) = 1$, rezultă

$$C_1 = -C_2 = \frac{1}{2\omega},$$

soluţia particulară fundamentală scriindu-se sub forma

$$E_+(x) = \frac{\theta(x)}{2\omega}(e^{\omega x} - e^{-\omega x}) = \frac{\theta(x)}{\omega} \operatorname{sh} \omega x, \ \omega > 0. \tag{2.1.47'}$$

Observăm că această soluţie diferă de soluţia (2.1.36), găsită anterior; dacă însă, la această soluţie adăugăm soluţia $-\frac{1}{2\omega} e^{\omega x}$, corespunzătoare ecuaţiei omogene, regăsim soluţia (2.1.36).

În mod analog, pentru ecuaţia

$$y''(x) + \omega^2 y(x) = f(x), \ f(x) \in K'(R), \tag{2.1.49}$$

găsim

$$E_0(x) = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x \tag{2.1.50}$$

şi sîntem conduşi la soluţia particulară fundamentală (2.1.35).

De exemplu, în cazul ecuaţiei

$$y''(x) + \omega^2 y(x) = \theta(x) \cos \omega' x, \ \omega \neq \omega', \ \omega, \omega' > 0, \tag{2.1.51}$$

soluţia particulară fundamentală (2.1.35) şi distribuţia din membrul al doilea au acelaşi suport $[0, \infty)$; obţinem astfel o soluţie

$$y(x) = E_+(x) * \theta(x) \cos \omega' x =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{pentru } x < 0, \\ \dfrac{1}{\omega_0} \displaystyle\int_0^x \sin \omega t \cos \omega'(x-t)\, dt = \dfrac{\cos \omega' x - \cos \omega x}{\omega^2 - \omega'^2} & \\ & \text{pentru } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Vom considera ecuația cu coeficienți variabili, liniară și neomogenă

$$xy''(x) - y'(x) = x^2. \tag{2.1.52}$$

Soluția generală a ecuației omogene se scrie sub forma

$$y(x) = C_1 + C_2x^2; \tag{2.1.53}$$

$W(x) = 2x \neq 0$, dacă $x \neq 0$, iar metoda variației constantelor ne conduce la sistemul

$$C_1'(x) + x^2C_2'(x) = 0,$$

$$2\,x^2C_2'(x) = x^2,$$

pentru determinarea distribuțiilor $C_1(x)$ și $C_2(x)$; observăm că sîntem în cazul în care coeficientul lui $y''(x)$ este diferit de unitate.

Rezultă

$$C_1'(x) = -\frac{1}{2}x^2, \quad C_2'(x) = \frac{1}{2}[h_2\delta(x) + h_3\delta'(x)], \tag{2.1.54}$$

de unde

$$C_1(x) = -\frac{1}{6}x^3 + h_1, \quad C_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{h_2}{2}\theta(x) +$$

$$+\frac{h_3}{2}\delta(x) + h_4, \quad h_1, h_2, h_3, h_4 = \text{const},$$

deci

$$y(x) = \frac{1}{3}x^3 + \alpha_1x^2 + \alpha_2x^2\theta(x) + \alpha_3, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = \text{const}. \tag{2.1.55}$$

Această soluție diferă de soluția ce se determină în mod clasic pe intervalele $(-\infty, 0)$ și $(0, \infty)$ și coincide cu aceasta pe intervalele menționate. Distribuția lui Heaviside, care a apărut în soluția din spațiul distribuțiilor, a permis exprimarea soluției pentru intervalul $(-\infty, \infty)$.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul ecuației

$$xy''(x) - y'(x) = 1 \tag{2.1.56}$$

scriem sistemul

$$\begin{aligned} C_1'(x) + x^2\, C_2'(x) &= 0, \\ 2x^2 C_2'(x) &= 1, \end{aligned} \tag{2.1.57}$$

care ne conduce la

$$C_1(x) = -\frac{1}{2}\, x + h_1,\ C_2(x) = -\frac{1}{2}\, \mathrm{Vp}\frac{1}{x} +$$

$$+\frac{h_2}{2}\,\theta(x) + \frac{h_3}{2}\,\delta'(x) + h_4, \quad h_1, h_2, h_3, h_4 = \text{const};$$

folosind proprietățile distribuției $\mathrm{Vp}\frac{1}{x}$, obținem

$$\begin{aligned} y(x) &= -x + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^2\,\theta(x) + \alpha_3, \\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 &= \text{const}. \end{aligned} \tag{2.1.58}$$

De asemenea, pentru ecuația

$$xy''(x) - y'(x) = \delta(x) \tag{2.1.59}$$

găsim sistemul

$$\begin{aligned} C_1'(x) + x^2\, C_2'(x) &= 0, \\ 2\, x^2\, C_2'(x) &= \delta(x), \end{aligned} \tag{2.1.60}$$

de unde

$$C_1(x) = -\frac{1}{2}\,\theta(x) + h_1,\ C_2(x) = \frac{1}{4}\,\delta'(x) +$$

$$+\frac{h_2}{2}\,\delta(x) + \frac{h_3}{2}\,\theta(x) + h_4, \quad h_1, h_2, h_3, h_4 = \text{const};$$

Scanned with OKEN Scanner

deci, soluţia generală va fi de forma

$$y(x)=-\frac{1}{2}\,\theta(x)+\alpha_1\,x^2+\alpha_2\,x^2\,\theta(x)+\alpha_3,\qquad \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3=\text{const},$$

nereprezentînd o soluţie fundamentală, deoarece nu putem exprima o soluţie a ecuaţiei

$$xy''(x)-y'(x)=f(x),\ f(x)\in K'(R) \qquad (2.1.61)$$

sub forma produsului de convoluţie $y(x)*f(x)$, operatorul $x\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ neavînd coeficienţi constanţi.

2.1.2.2. Metoda transformărilor integrale

Transformările integrale pot fi deosebit de utile pentru găsirea soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale în distribuţii; vom arăta, în cele ce urmează, cum se pot folosi *transformatele Fourier* şi *transformatele Laplace* în acest scop.

Fie, de exemplu, ecuaţia (care nu este diferenţială)

$$x^n y(x)=0. \qquad (2.1.62)$$

Pentru $x\neq 0$ soluţia este $y=0$, constituind soluţia clasică; în distribuţii însă ecuaţia admite şi alte soluţii.

Aplicînd transformata Fourier şi folosind proprietatea (1.5.22′), obţinem

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\,F(s)=0, \qquad (2.1.63)$$

de unde — în baza teoremei 2.1.2′ — rezultă

$$F(s)=C_0+C_1 s+C_2\,s^2+\ldots+C_{n-1}\,s^{n-1};$$

efectuînd transformata Fourier inversă, putem scrie

$$y(x)=C_0\,\delta(x)+C_1\delta'(x)+C_2\delta''(x)+\ldots+C_{n-1}\,\delta^{(n-1)}(x).$$

Scanned with OKEN Scanner

În particular, pentru $n = 1$, soluția ecuației

$$xy(x) = 0 \tag{2.1.64}$$

este

$$y(x) = C_0\,\delta(x).$$

Fie acum operatorul liniar cu coeficienți constanți

$$\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} + a_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + a_n \tag{2.1.65}$$

și ecuația (2.1.30) corespunzătoare; aplicînd transformata Fourier acestei ecuații, obținem

$$\mathrm{P}(-is)\,F[E(x)] = 1,\quad s = u + iv.$$

Această ecuație are totdeauna o soluție, deci putem determina o soluție fundamentală pentru ecuația (2.1.30), precum și o soluție pentru ecuația (2.1.29), admițînd că produsul de convoluție (2.1.31) există.

Menționăm că transformata Fourier se poate aplica direct și unei ecuații de forma (2.1.37), chiar dacă aceasta nu este cu coeficienți constanți. De exemplu, aplicînd transformata Fourier ecuației

$$E''(x) - \omega^2 E(x) = \delta(x), \tag{2.1.66}$$

obținem

$$(-is)^2 F[E(x)] - \omega^2 F[E(x)] = 1, \tag{2.1.67}$$

de unde

$$F[E(x)] = -\frac{1}{s^2 + \omega^2};$$

folosind formula (1.5.37), regăsim soluția fundamentală (2.1.36).

De asemenea, aplicînd transformata Laplace ecuației

$$E''(x) + \omega^2 E(x) = \delta(x), \tag{2.1.68}$$

obținem

$$p^2 L[E(x)] + \omega^2 L[E(x)] = 1, \tag{2.1.69}$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde

$$L[E(x)] = \frac{1}{p^2 + \omega^2};$$

folosind formula (1.5.69), obţinem soluţia fundamentală (2.1.35).

Se considerăm şi ecuaţia liniară neomogenă cu coeficienţi variabili

$$xy''(x) + 2y'(x) = \delta(x). \qquad (2.1.70)$$

Aplicînd transformata Laplace, căpătăm

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(p^2 L[y(x)]) + 2p\, L[y(x)] = 1, \qquad (2.1.71)$$

de unde

$$-p^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} L[y(x)] = 1;$$

obţinem

$$L[y(x)] = \frac{1}{p} + C_1, \qquad (2.1.72)$$

iar transformata Laplace inversă ne permite să scriem

$$y(x) = \theta(x) + C_1\delta(x) + C_2, \qquad (2.1.70')$$

unde am adăugat o a doua constantă arbitrară, corespunzătoare ecuaţiei omogene.

Aplicînd transformata Fourier ecuaţia (2.1.70), se obţine

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s^2 F[y(x)]) - 2\mathrm{i}s\, F[y(x)] = 1, \qquad (2.1.73)$$

de unde

$$\mathrm{i}s^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} F[y(x)] = 1;$$

Scanned with OKEN Scanner

prin urmare,

$$F[y(x)] = \frac{i}{s} + C_1, \quad C_1 = \text{const}, \tag{2.1.74}$$

transformata Fourier inversă conducîndu-ne la aceeaşi soluţie (2.1.70′).

2.2. Ecuaţii de convoluţie

2.2.1. *Ecuaţii de convoluţie*

2.2.1.1. Algebre de convoluţie 28

Într-un spaţiu liniar se defineşte operaţia de compunere (adunare) a două elemente ale sale, precum şi operaţia de înmulţire cu un număr (real sau complex); în unele din aceste spaţii se poate defini şi o operaţie de înmulţire (o altă operaţie de compunere) între două elemente ale sale.

Definiţia 2.2.1. Spaţiul liniar A se numeşte *algebră*, dacă există o operaţie de înmulţire între elemente, satisfăcînd proprietăţile:

a) $x(yz) = (xy)z$, $x,y,z \in A$ (*asociativitate*),

b) $(\alpha(x)\ (\beta y) = (\alpha\beta)\ (xy)$, $x,y \in A$, $\alpha, \beta \in R$,

c) $x(y+z) = xy + xz$, $(y+z)\,x = yx + zx$, $x, y, z \in A$ (*distributivitate faţă de adunare*).

Dacă produsul se bucură şi de proprietatea

d) $xy = yx$, $x, y \in A$ (*comutativitate*),

spunem că *algebra* este *comutativă*.

Un element $u \in A$ se numeşte *element unitate* dacă se bucură de proprietatea

e) $ux = xu = x$ pentru orice $x \in A$;

în acest caz *algebra* este *cu element unitate*.

De exemplu, mulţimea funcţiilor continue pe intervalul $[a, b]$ formează o algebră comutativă cu element unitate, dacă operaţia de înmulţire este cea obişnuită între funcţii.

Scanned with OKEN Scanner

De asemenea, mulțimea matricelor pătrate de ordinul n, ale căror elemente sînt numere reale, formează o algebră cu element unitate (necomutativă).

Dacă pentru un element $x \in A$ există un element $x^{-1} \in A$, care se bucură de proprietatea

$f)$ $xx^{-1} = x^{-1}x = u$,

unde u este elementul unitate, atunci x^{-1} se numește *inversul* lui x.

În algebra matricelor pătrate de ordinul n nu orice element are un invers ; existența unui invers este asigurată dacă matricele sînt nedegenerate (determinantul matricei este diferit de zero).

În spațiul distribuțiilor K', care este un spațiu liniar (vectorial), se definește produsul de convoluție, care reprezintă o operație de înmulțire a două distribuții ; dar spațiul distribuțiilor nu formează o algebră în raport cu produsul de convoluție, deoarece acest produs nu există pentru orice pereche de două distribuții. Dacă acest produs există, atunci el este comutativ, asociativ și are drept element unitate distribuția $\delta(x)$ a lui Dirac ; de aceea, vom considera numai anumite subspații din K', care formează o algebră în raport cu produsul de convoluție.

Definiția 2.2.2. Subspațiul vectorial $\mathscr{K}' \subset K'$ formează o *algebră de convoluție* (comutativă, cu element unitate), dacă sînt satisfăcute condițiile :

a) Produsul de convoluție a două sau mai multe distribuții din $\mathscr{K}'$ există și aparține acestui subspațiu ;

b) $\delta(x) \in \mathscr{K}'$ (elementul unitate).

De exemplu, mulțimea A' a distribuțiilor cu suport mărginit formează o algebră de convoluție, deoarece, dacă $f(x)$, $g(x) \in A'$, atunci produsul de convoluție există și $f(x) * g(x) \in A'$.

De asemenea, mulțimea K'_+, care cuprinde distribuțiile din K' cu suportul pe $[0, \infty)$, formează o algebră de convoluție.

Dacă o distribuție $f(x) \in \mathscr{K}'$ admite un invers $f^{-1}(x) \in \mathscr{K}'$, atunci

$$f(x) * f^{-1}(x) = f^{-1}(x) * f(x) = \delta(x). \qquad (2.2.1)$$

Scanned with OKEN Scanner

În consideraţiile făcute mai sus, putem admite că $x \in R^n$.

Fie, de exemplu, algebra de convoluţie $K'_+(R)$. Distribuţia $\theta(x) \in K'_+$, deoarece are suportul $[0, \infty]$; distribuţia $\delta'(x)$ are suportul în origine, deci $\delta'(x) \in K'_+$ şi

$$\theta(x) * \delta'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\theta(x) * \delta(x)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\theta(x) = \delta(x).$$

Rezultă

$$\theta^{-1}(x) = \delta'(x). \tag{2.2.2}$$

În mod analog, observînd că $f(x) = \theta(x)\, \mathrm{e}^x$, $[\delta'(x) - \delta(x)] \in K'_+(R)$ şi

$$\theta(x)\, \mathrm{e}^x * [\delta'(x) - \delta(x)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\theta(x)\, \mathrm{e}^x] - \theta(x)\, \mathrm{e}^x =$$

$$= \delta(x)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 \delta(x) = \delta(x),$$

putem scrie

$$f^{-1}(x) = \delta'(x) - \delta(x). \tag{2.2.3}$$

Deoarece distribuţia (2.1.35) reprezintă soluţia fundamentală a ecuaţiei (2.1.68), putem scrie

$$E^{-1}(x) * E(x) = [\delta''(x) + \omega^2 \delta(x)] * E(x) =$$

$$= E''(x) + \omega^2 E(x) = \delta(x),$$

deci

$$E^{-1}(x) = \delta''(x) + \omega^2 \delta(x), \tag{2.2.4}$$

distribuţiile $E(x)$ şi $E^{-1}(x)$ aparţinînd spaţiului K'_+.

Ţinînd seama de faptul că $\theta(x, y)$, $\dfrac{\partial^2 \delta(x, y)}{\partial x\, \partial y} \in K'_+(R^2)$, putem scrie

$$\theta(x, y) * \frac{\partial^2 \delta(x, y)}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}[\theta(x, y) * \delta(x, y)] =$$

$$= \frac{\partial^2 \theta(x, y)}{\partial x\, \partial y} = \delta(x, y),$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă

$$\theta^{-1}(x, y) = \frac{\partial^2 \delta(x, y)}{\partial x \, \partial y}. \tag{2.2.5}$$

Pentru distribuţia $\Delta\delta(x, y) \in K'_+(R^2)$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, scriem produsul de convoluţie

$$\Delta\delta(x, y) * \left(-\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \right) = \delta(x, y) * \Delta \left(-\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \right) =$$
$$= \delta(x, y) * \delta(x, y) = \delta(x, y),$$

unde folosim relaţia (1.4.36); totuşi, distribuţia $-\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$, cu $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, nu reprezintă inversul distribuţiei $\Delta\delta(x, y)$, deoarece nu aparţine subspaţiului $K'_+(R^2)$.

Teorema 2.2.1. *Dacă* $f(x), g(x) \in K'_+$ *admit inversele* $f^{-1}(x), g^{-1}(x)$, *atunci* $f(x) * g(x) \in K'_+$ *admite ca invers*

$$[f(x) * g(x)]^{-1} = f^{-1}(x) * g^{-1}(x). \tag{2.2.6}$$

Într-adevăr, în baza relaţiei de definiţie f), putem scrie

$$[f(x) * g(x)] * [f^{-1}(x) * g^{-1}(x)] = [f(x) * f^{-1}(x)] * [g(x) * g^{-1}(x)] =$$
$$= \delta(x) * \delta(x) = \delta(x).$$

2.2.1.2. Ecuaţii de convoluţie

Fie $\mathcal{K}' \subset K'$ o algebră de convoluţie, iar $a(x), b(x) \in \mathcal{K}'$; consideraţiile ce urmează sînt valabile pentru $x \in R^n$.

Definiţia 2.2.3. O ecuaţie de forma

$$a(x) * y(x) = b(x), \tag{2.2.7}$$

unde $a(x)$ şi $b(x)$ sînt distribuţii cunoscute, iar $y(x)$ este o distribuţie necunoscută, se numeşte *ecuaţie de convoluţie.*

Teorema 2.2.2. *Dacă* $a(x) \in \mathcal{K}'$ *este dat, atunci condiţia necesară şi suficientă pentru ca ecuaţia de convoluţie* (2.2.7) *să admită cel puţin o soluţie, oricare ar fi* $b(x) \in \mathcal{K}'$, *este ca*

$a(x)$ să aibă un invers $a^{-1}(x)$; dacă $a^{-1}(x)$ există, atunci ecuația are o singură soluție

$$y(x) = a^{-1}(x) * b(x). \qquad (2.2.7')$$

Condiția menționată este necesară; într-adevăr, admitem că pentru orice $b(x) \in \mathcal{K}'$ ecuația (2.2.7) are cel puțin o soluție. În particular, pentru $b(x) = \delta(x) \in \mathcal{K}'$ avem $a(x) * y(x) = \delta(x)$, deci $y(x) = a^{-1}(x)$, adică $a(x)$ are un invers.

Condiția este și suficientă, deoarece, dacă $a(x) \in \mathcal{K}'$ are un invers $a^{-1}(x) \in \mathcal{K}'$, putem scrie

$$a(x) * a^{-1}(x) = a^{-1}(x) * a(x) = \delta(x);$$

înmulțind ecuația (2.2.7) la stînga cu $a^{-1}(x)$, obținem

$$a^{-1}(x) * [a(x) * y(x)] = a^{-1}(x) * b(x) = \delta(x) * y(x) = y(x),$$

ecuația respectivă avînd deci o soluție de forma (2.2.7').

Pentru a pune în evidență unicitatea soluției, este suficient să înmulțim soluția (2.2.7') cu $a(x)$; obținem ecuația (2.2.7), ceea ce ne arată că relațiile (2.2.7) și (2.2.7') sînt echivalente. Observînd că $a^{-1}(x)$ este o soluție unică a ecuației (2.2.7) pentru $b(x) = \delta(x)$, teorema este demonstrată.

Elementul invers $a^{-1}(x)$ al lui $a(x) \in \mathcal{K}'$ se numește *soluția elementară (fundamentală) a ecuației de convoluție* (2.2.7).

Dacă $a(x)$ este o funcție indefinit derivabilă, atunci ea nu are un invers; în acest caz, ecuația (2.2.7) nu are o soluție elementară.

Să considerăm ecuația de convoluție

$$\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) \delta(x) * y(x) = \delta(x), \qquad (2.2.8)$$

definită în $K'_+(R)$, unde $\mathrm{P}\left(\frac{d}{dx}\right)$ reprezintă operatorul diferențial liniar cu coeficienți constanți (2.1.65). Produsul de

Scanned with OKEN Scanner

convoluție (2.2.8) există pentru orice distribuție $y(x) \in K'_+$; deoarece

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)\delta(x) * y(x) = \delta(x) * P\left(\frac{d}{dx}\right) y(x) =$$

$$= P\left(\frac{d}{dx}\right) y(x) = \delta(x),$$

rezultă că $y(x)$ este soluția fundamentală corespunzătoare operatorului (2.1.65). Ținînd seama de 2.1.2.1, soluția fundamentală pentru ecuația (2.1.37) este de forma (2.1.42), unde $y_n(x)$ reprezintă soluția ecuației omogene corespunzătoare, cu condiții inițiale de forma (2.1.44′). Putem deci scrie

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)\delta(x) * \theta(x) y_n(x) = \delta(x), \qquad (2.2.9)$$

astfel încît

$$\left[P\left(\frac{d}{dx}\right)\delta(x)\right]^{-1} = \theta(x) y_n(x) \in K'_+.$$

Rezultă că ecuația

$$P\left(\frac{d}{dx}\right)\delta(x) * y(x) = f(x), \quad f(x) \in K'_+, \qquad (2.2.10)$$

are o singură soluție

$$y(x) = \left[P\left(\frac{d}{dx}\right)\delta(x)\right]^{-1} * f(x) = \theta(x) y_n(x) * f(x), \qquad (2.2.10')$$

care satisface și ecuația diferențială

$$P\left(\frac{d}{dx}\right) y(x) = f(x), \quad f(x) \in K'_+. \qquad (2.2.10'')$$

În particular, soluția fundamentală (2.1.35) a operatorului $P_1\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{d^2}{dx^2} + \omega^2$ aparține algebrei de convoluție K'_+; prin urmare,

$$\left[P\left(\frac{d}{dx}\right)\delta(x)\right]^{-1} = \frac{\theta(x) \sin \omega x}{\omega}, \quad \omega > 0. \qquad (2.2.11)$$

Scanned with OKEN Scanner

În legătură cu operatorul $P\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{d^2}{dx^2} - \omega^2$, observăm că soluția fundamentală (2.1.36) nu aparține algebrei de convoluție K'_+, deoarece are drept suport toată axa ; în consecință, această soluție fundamentală nu reprezintă inversul lui $P\left(\frac{d}{dx}\right)\delta(x)$. În schimb, soluția fundamentală (2.1.47′) are suportul în $[0, \infty)$, deci aparține lui K'_+ ; putem scrie

$$\left[\left(\frac{d^2}{dx^2} - \omega^2\right)\delta(x)\right]^{-1} = \frac{\theta(x)}{\omega} \operatorname{sh} \omega x, \ \omega > 0. \quad (2.2.12)$$

În baza rezultatelor anterioare, ecuația

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \omega^2\right)\delta(x) * y(x) = f(x), \quad f(x) \in K'_+, \quad (2.2.13)$$

are o singură soluție și anume

$$y(x) = \frac{\theta(x)}{\omega} \operatorname{sh} \omega x * f(x).$$

Soluția fundamentală pentru operatorul $\frac{d^n}{dx^n}$ este dată de relația (2.1.34) și aparține algebrei de convoluție K'_+ ; rezultă că putem scrie

$$[\delta^{(n)}(x)]^{-1} = \frac{\theta(x)}{(n-1)!} x^{n-1}. \quad (2.2.14)$$

În general, în mulțimea soluțiilor fundamentale ale ecuației diferențiale (2.2.10″) există o soluție ce aparține lui K' ; această soluție este unică și reprezintă soluția elementară a ecuației de convoluție corespunzătoare.

2.2.1.3. Rezolvarea operațională a ecuațiilor de convoluție

Fie ecuația de convoluție (2.2.7), cu $a(x)$, $b(x) \in K'_+$; teorema 2.2.2 ne arată în ce condiții obținem o soluție unică (2.2.7′). Printre metodele eficace de rezolvare

Scanned with OKEN Scanner

a acestei ecuații menționăm transformata Laplace, care se bucură de proprietatea (1.5.84); într-adevăr, această proprietate are loc totdeauna atunci cînd cei doi factori ai produsului au suporturile pe semidreapta $x \geqslant 0$, admițînd astfel transformata Laplace. În acest caz, prin aplicarea transformatei Laplace acestei ecuații obținem

$$L[a(x)]\, L[y(x)] = L[b(x)], \qquad (2.2.15)$$

de unde

$$L[y(x)] = \frac{L[b(x)]}{L[a(x)]} = L(p), \quad p = u + iv;$$

dacă $L(p)$ are un original care aparține algebrei de convoluție K'_+, acesta reprezintă soluția unică căutată.

Această metodă nu se poate aplica în cazul în care distribuțiile $a(x)$ și $b(x)$ nu admit transformate Laplace sau funcția $L(p)$ nu admite un original.

Observăm că unei ecuații de convoluție (2.2.7) i se poate aplica și transformata Fourier; trebuie însă să ne asigurăm de îndeplinirea condițiilor de aplicare a unei asemenea transformate la un produs de convoluție.

Fie, de exemplu, ecuația

$$\theta(x) \sin x * y(x) = \frac{1}{2}\, \theta(x)\, x \sin x, \qquad (2.2.16)$$

pentru care distribuțiile date aparțin algebrei de convoluție K'_+. Ținînd seama de teorema (1.5.64) și de transformata Laplace (1.5.93), putem scrie

$$L[\theta(x) \sin x]\, L[y(x)] = \frac{1}{2}\, L[\theta(x)\, x \sin x]$$

sau

$$\frac{1}{p^2+1} L[y(x)] = -\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\frac{1}{p^2+1}\right),$$

de unde

$$L[y(x)] = \frac{p}{p^2+1};$$

Scanned with OKEN Scanner

soluţia ecuaţiei (2.2.16) este deci unică şi este dată de

$$y(x) = \theta(x) \cos x, \qquad (2.2.16')$$

care corespunde relaţiei (1.3.29).

Fie, de asemenea, ecuaţia

$$\theta(x) \cos x * y(x) = \frac{1}{2}\,\theta(x)\,(\sin x + x \cos x), \qquad (2.2.17)$$

ai cărei coeficienţi aparţin lui K'_+. Aplicînd transformata Laplace, obţinem

$$\frac{p}{p^2+1}\,L[y(x)] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p^2+1} + \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2}\right] = \frac{p^2}{(p^2+1)^2},$$

de unde

$$L[y(x)] = \frac{p}{p^2+1},$$

deci tot soluţia (2.2.16'), corespunzătoare relaţiei (1.3.29'').

Să determinăm acum inversul distribuţiei $a(x) = \theta(x) + \delta'(x)$, care aparţine, evident, algebrei de convoluţie K'_+. Formăm ecuaţia de convoluţie

$$[\theta(x) + \delta'(x)] * y(x) = \delta(x), \qquad (2.2.18)$$

căreia îi aplicăm transformata Laplace

$$\left(\frac{1}{p} + p\right) L[y(x)] = 1;$$

rezultă

$$L[y(x)] = \frac{p}{p^2+1},$$

astfel încît sîntem conduşi tot la soluţia (2.2.16').

Dacă plecăm de la ecuaţia

$$[\delta''(x) - \omega^2\delta(x)] * y(x) = \delta(x) \qquad (2.2.19)$$

şi aplicăm transformata Laplace

$$(p^2 - \omega^2)\,L[y(x)] = 1,$$

Scanned with OKEN Scanner

găsim

$$L[y(x)] = \frac{1}{p^2-\omega^2} = \frac{1}{2\omega}\left(\frac{1}{p-\omega} - \frac{1}{p+\omega}\right);$$

aceasta ne conduce la soluţia

$$y(x) = \frac{\theta(x)}{2\omega}(e^{\omega x} - e^{-\omega x}) = \frac{\theta(x)}{\omega}\,\mathrm{sh}\,\omega x,\ \omega > 0,$$

care corespunde soluţiei fundamentale (2.1.47′).

Dacă dorim, de exemplu, să determinăm distribuţia $y(x)$, astfel încît distribuţia

$$E(x) = y(x) * \theta(x)\sin x \qquad (2.2.20)$$

să reprezinte soluţia fundamentală pentru operatorul $\frac{d}{dx} - 1$, sîntem conduşi la ecuaţia de convoluţie

$$\left(\frac{d}{dx} - 1\right)\theta(x)\sin x * y(x) = \delta(x), \qquad (2.2.21)$$

definită în algebra de convoluţie K'_+. Procedînd ca mai sus, obţinem

$$y(x) = \delta(x) + \delta'(x) + 2e^x. \qquad (2.2.21')$$

2.2.2. *Ecuaţii integrale*

2.2.2.1. Consideraţii generale

Numeroase probleme de fizică matematică se exprimă prin ecuaţii în care funcţia necunoscută apare sub semnul integrală; asemenea ecuaţii se numesc *ecuaţii integrale*. Astfel, rezolvarea ecuaţiei diferenţiale de ordinul întîi

$$y'(x) = f(x, y),\ f(x, y) \in C^0(D), \qquad (2.2.22)$$

cu condiţia $y = y_0$ pentru $x = x_0$, $(x_0, y_0) \in D \subset R^2$, este echivalentă cu ecuaţia integrală

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(\xi, y)\,d\xi + y_0, \qquad (2.2.22')$$

Scanned with OKEN Scanner

unde funcţia necunoscută $y(x)$ apare şi sub semnul integrală; în general, ea nu intră liniar, astfel încît ecuaţia respectivă este o *ecuaţie integrală neliniară*.

Dacă funcţia $f(x, y)$ se exprimă liniar în raport cu y, ecuaţia integrală (2.2.22′) va fi *liniară*. Între ecuaţiile integrale liniare, vom menţiona *ecuaţiile lui Volterra de speţa I*, care sînt de forma

$$\int_0^x \overline{K}(x, t)\, y(t)\, \mathrm{d}t = f(x), \quad x \geqslant 0, \tag{2.2.23}$$

precum şi *ecuaţiile lui Volterra de speţa II*, care sînt de forma

$$y(x) + \lambda \int_0^x \overline{K}(x, t)\, \mathrm{d}t = f(x), \quad x \geqslant 0. \tag{2.2.24}$$

Funcţiile $\overline{K}(x, t)$ şi $f(x)$ sînt cunoscute, reprezentînd nucleul ecuaţiei integrale, respectiv termenul liber; funcţia $y(x)$ este necunoscută, iar λ este un parametru real sau complex. Funcţiile $\overline{K}(x, t)$ şi $f(x)$ se admit local integrabile; de asemenea, se admite că nucleul $\overline{K}(x, t)$ este nul pentru orice $t \geqslant x \geqslant 0$.

Dacă funcţia $f(x)$ este nulă, atunci ecuaţiile (2.2.23) şi (2.2.24) sînt *omogene*.

Se obţin forme speciale ale ecuaţiilor lui Volterra, dacă considerăm $\lambda = 1$ şi nucleul $\overline{K}(x, t) = K(x - t)$; astfel, putem scrie

$$\int_0^x K(x-t)\, y(t)\, \mathrm{d}t = f(x), \quad x \geqslant 0, \tag{2.2.23′}$$

$$y(x) + \int_0^x K(x-t) y(t)\, \mathrm{d}t = f(x), \quad x \geqslant 0. \tag{2.2.24′}$$

Dacă prelungim funcţiile $K(x), f(x)$ şi $y(x)$ cu valori nule pentru $x < 0$ şi dacă introducem distribuţiile corespunză-

Scanned with OKEN Scanner

toare, putem exprima aceste ecuaţii integrale cu ajutorul produsului de convoluţie :

$$\theta(x)\,K(x) * y(x) = \theta(x)\,f(x), \qquad (2.2.23'')$$

$$y(x) + \theta(x)\,K(x) * y(x) = \theta(x)\,f(x)\,; \qquad (2.2.24'')$$

observînd că $\theta(x)\,K(x)$, $\theta(x)\,f(x)$, $y(x) \in K'_+(R)$, ecuaţia lui Volterra de speţa I (2.2.23′) devine o ecuaţie de convoluţie (2.2.23″) în algebra de convoluţie K'_+.

Observăm că ecuaţia (2.2.23″) nu admite totdeauna o soluţie. De exemplu, dacă după prelungire nucleul $\theta(x)\,K(x)$ este o funcţie de clasa C^∞, atunci ecuaţia de convoluţie nu are soluţie. Într-adevăr, oricare ar fi $g(x) \in K'_+$ produsul de convoluţie $\theta(x)\,K(x) * g(x)$ este o funcţie indefinit derivabilă; prin urmare, pentru $g(x) = [\theta(x)\,K(x)]^{-1}$, produsul de convoluţie $\theta(x)\,K(x) * [\theta(x)\,K(x)]^{-1}$ reprezintă o funcţie indefinit derivabilă, care nu poate fi egală cu $\delta(x)$.

Pentru ecuaţia lui Volterra de speţa II, considerăm distribuţia

$$K_1(x) = \theta(x)\,K(x) + \delta(x)\,; \qquad (2.2.25)$$

deoarece $K_1(x) \in K'_+$, putem scrie

$$K_1(x) * y(x) = \theta(x)\,f(x), \qquad (2.2.24''')$$

deci şi ecuaţia lui Volterra de speţa II se reduce la o ecuaţie de convoluţie în algebra de convoluţie K'_+.

2.2.2.2. Ecuaţii integrale Volterra de speţa I

Fie ecuaţia integrală Volterra de speţa I

$$\int_0^x \cos(x - t)\,y(t)\,dt = f(x), \quad x \geqslant 0, \qquad (2.2.26)$$

cu nucleul $K(x) = \cos x$; efectuînd prelungirea cu zero pentru $x < 0$ a funcţiilor $\cos x$, $f(x)$ şi $y(x)$, ecuaţia (2.2.26) va fi echivalentă cu ecuaţia de convoluţie

$$\theta(x)\cos x * y(x) = \theta(x)\,f(x).$$

Scanned with OKEN Scanner

Observăm [vezi (2.2.18)] că

$$[\theta(x)\cos x]^{-1} = \theta(x) + \delta'(x), \tag{2.2.27}$$

așa încît soluția ecuației (2.2.26) va fi dată de

$$y(x) = [\theta(x) + \delta'(x)] * \theta(x) f(x) =$$

$$= [\theta(x) f(x)]' + \theta(x) \int_0^x f(t)\, dt. \tag{2.2.28}$$

În particular, pentru $f(x) = \sin x$ obținem

$$y(x) = [\theta(x) \sin x]' + \theta(x) \int_0^x \sin t\, dt = \theta(x),$$

reprezentînd soluția ecuației

$$\int_0^x \cos(x - t)\, y(t)\, dt = \sin x, \quad x \geqslant 0.$$

Fie ecuația integrală

$$\int_0^x (x - t) \cos(x - t)\, y(t)\, dt = f(x), \quad x \geqslant 0, \tag{2.2.29}$$

unde $f(x)$ este o funcție dată; nucleul acestei ecuații este $K(x) = x \cos x$ și putem scrie ecuația de convoluție

$$\theta(x)\, x \cos x * y(x) = \theta(x) f(x).$$

Luînd în membrul al doilea distribuția lui Dirac, putem scrie transformata Laplace corespunzătoare sub forma

$$-\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{p^2+1}\right) L\,[[\theta(x)\cos x]^{-1}] = 1,$$

de unde

$$L[[\theta(x)\, x \cos x]^{-1}] =$$

$$= \frac{(p^2+1)^2}{p^2-1} = p^2 + 3 + 2\left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1}\right);$$

Scanned with OKEN Scanner

rezultă

$$[\theta(x)\, x \cos x]^{-1} = \delta''(x) + 3\delta(x) + 2\theta(x)\,(e^x - e^{-x}) =$$
$$= \delta''(x) + 3\delta(x) + 4\theta(x)\,\mathrm{sh}x. \qquad (2.2.30)$$

Prin urmare, soluția ecuației (2.2.29) va fi

$$y(x) = [\delta''(x) + 3\delta(x) + 4\theta(x)\,\mathrm{sh}x] * \theta(x) f(x) =$$
$$= [\theta(x) f(x)]'' + 3\theta(x) f(x) + 4\theta(x)\,\mathrm{sh}x * \theta(x) f(x) =$$
$$= [\theta(x) f(x)]'' + 3\theta(x) f(x) + 4\theta(x) \int_0^x \mathrm{sh}(x-t)\, f(t)\, dt; \qquad (2.2.31)$$

în particular, pentru $f(x) = e^x$, obținem

$$y(x) = \delta'(x) + \delta(x) + 2\,\theta(x)\,[(1 + x)\, e^x + \mathrm{sh}\, x].$$

Corespunzător ecuației integrale

$$\int_0^x \sin ty\,(x - t)\, dt = f(x), \quad x \geqslant 0, \qquad (2.2.32)$$

putem scrie, în distribuții, ecuația de convoluție

$$\theta(x) \sin x * y(x) = \theta(x) f(x).$$

Ținînd seama de formulele (2.1.35) și (2.2.4), pentru $\omega = 1$, rezultă

$$[\theta(x) \sin x]^{-1} = \delta''(x) + \delta(x); \qquad (2.2.33)$$

în consecință, soluția ecuației (2.2.32) va fi

$$y(x) = [\delta''(x) + \delta(x)] * \theta(x) f(x) =$$
$$= [\theta(x) f(x)]'' + \theta(x) f(x), \qquad (2.2.34)$$

derivarea efectuîndu-se în sensul teoriei distribuțiilor.

În particular, pentru $f(x) = \cos x$, putem scrie

$$y(x) = \delta'(x).$$

Ecuația integrală

$$\int_0^x (e^{-t} - \sin t)\, y(x-t)\, dt = f(x), \quad x \geqslant 0, \qquad (2.2.35)$$

Scanned with OKEN Scanner

ne conduce la ecuația de convoluție

$$\theta(x)\,(e^{-x} - \sin x) * y(x) = \theta(x)\,f(x).$$

În mod analog, se poate arăta că

$$[\theta(x)\,(e^{-x} - \sin x)]^{-1} = \delta'(x) + 2\,\delta(x) + \theta(x)\,(4e^{x} - 1), \tag{2.2.36}$$

așa încît soluția ecuației integrale (2.2.35) va fi

$$y(x) = [\delta'(x) + 2\delta(x) + \theta(x)\,(4e^{x} - 1)] * \theta(x)\,f(x) =$$

$$= [\theta(x)\,f(x)]' + 2\theta(x)\,f(x) + \theta(x)\int_0^x (4e^{x-t} - 1)\,f(t)\,dt. \tag{2.2.37}$$

În particular, pentru $f(x) = \theta(x)$, obținem

$$y(x) = \delta(x) + \theta(x)\,(4e^{x} - x - 2).$$

2.2.2.3. Ecuații integrale Volterra de speța II

Fie acum ecuația integrală Volterra de speța II

$$y(x) = \int_0^x e^{x-t}\,y(t)\,dt = f(x),\ x \geqslant 0; \tag{2.2.38}$$

Obținem ecuația de convoluție corespunzătoare sub forma

$$[\delta(x) + \theta(x)\,e^{x}] * y(x) = f(x).$$

Observăm că

$$[\delta(x) + \theta(x)\,e^{x}]^{-1} = \delta(x) - \theta(x); \tag{2.2.39}$$

deci, soluția ecuației (2.2.38) va fi

$$y(x) = [\delta(x) - \theta(x)] * \theta(x)\,f(x) =$$

$$= \theta(x)\,f(x) - \theta(x)\int_0^x f(x-t)\,dt. \tag{2.2.40}$$

Menționăm că soluția acestei ecuații se poate exprima și sub forma

$$y(x) = f(x) - \int_0^x f(x-t)\,dt,\ x \geqslant 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru ecuaţia integrală

$$y(x) + \int_0^x \cos(x-t)\, y(t)\, dt = f(x),\ x \geqslant 0, \quad (2.2.41)$$

obţinem ecuaţia de convoluţie

$$[\delta(x) + \theta(x) \cos x] * y(x) = \theta(x) f(x).$$

Vom calcula inversul nucleului $K_1(x) = \delta(x) + \theta(x) \cos x$ în algebra de convoluţie K'_+, aplicînd transformata Laplace; rezultă

$$\left(1 + \frac{p}{p^2+1}\right) L\,[K_1^{-1}(x)] = 1,$$

de unde

$$L\,[K_1^{-1}(x)] = \frac{p^2+1}{p^2+p+1} = 1 - \frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} +$$

$$+\frac{1}{2}\,\frac{1}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2},$$

$$K^{-1}(x) = \delta(x) - \theta(x)\, e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right). \quad (2.2.42)$$

Soluţia ecuaţiei (2.2.41) se va scrie sub forma

$$y(x) =$$

$$= \left[\delta(x) - \theta(x)\, e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right] * \theta(x) f(x) =$$

$$= \theta(x) f(x) - \theta(x)\int_0^x e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) f(x-t)\, dt \quad (2.2.43)$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$y(x) = f(x) - \int_0^x e^{-\frac{t}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} t - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) f(x-t)\, dt,\ x \geqslant 0.$$

Fie, de asemenea, ecuaţia

$$y(x) + \int_0^x \sin(x-t)\, y(t)\, dt = f(x),\ x \geqslant 0; \quad (2.2.44)$$

ecuaţia de convoluţie corespunzătoare va fi

$$[\delta(x) + \theta(x) \sin x] * y(x) = \theta(x) f(x).$$

Observînd că

$$[\delta(x) + \theta(x) \sin x]^{-1} = \delta(x) - \theta(x) \sin \sqrt{2}x, \quad (2.2.45)$$

putem scrie soluţia ecuaţiei (2.2.44) sub forma

$$y(x) = [\delta(x) - \theta(x) \sin \sqrt{2}x] * \theta(x) f(x) =$$

$$= \theta(x) f(x) - \theta(x) \int_0^x \sin \sqrt{2}\,(x-t) f(t)\, dt \quad (2.2.46)$$

sau

$$y(x) = f(x) - \int_0^x \sin \sqrt{2}\,(x-t) f(t)\, dt,\ x \geqslant 0.$$

Pentru ecuaţia

$$y(x) + \int_0^x (x-t) \cos(x-t)\, y(t)\, dt = f(x),\quad x \geqslant 0, \quad (2.2.47)$$

observăm că

$$[\delta(x) + \theta(x)\, x \cos x]^{-1} = \delta(x) + \frac{1}{3} x\, \theta(x) -$$

$$- \frac{1}{9} [\theta(x) - e^{-3x}], \quad (2.2.48)$$

ceea ce ne conduce la soluţia

$$y(x) = f(x) + \frac{1}{3} \int_0^x \left[t - \frac{1}{3} (1 - e^{-3t}) \right] f(x-t)\, dt,\ x \geqslant 0. \quad (2.2.49)$$

Scanned with OKEN Scanner

În legătură cu ecuația integrală Volterra de speța II, scrisă sub forma (2.2.24'''), putem enunța

Teorema 2.2.3. *Dacă nucleul $K(x)$ este o funcție local integrabilă, atunci $\delta(x) + K(x) = K_1(x) \in K'_+$ este inversabil și unic în algebra de convoluție K'_+ pentru orice $K(x) \in K'_+$, inversul său fiind*

$$K_1^{-1}(x) = \delta(x) + H(x), \tag{2.2.50}$$

unde $H(x) \in K'_+$.

Aplicînd transformata Laplace ecuației

$$[\delta(x) + K(x)] * K_1^{-1}(x) = \delta(x),$$

obținem

$$L[K_1^{-1}(x)] = \frac{1}{1+g(p)} = 1 - g(p) + g^2(p) -$$

$$- g^3(p) + \ldots + (-1)^n g^n(p) + \ldots, \quad g(p) = L[K(x)],$$

unde am admis că seria este convergentă. Transformata Laplace inversă ne conduce la

$$K_1^{-1}(x) = \delta(x) - K(x) + K^{*2}(x) - K^{*3}(x) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n K^{*n}(x) + \ldots, \tag{2.2.51}$$

unde am introdus notația

$$K^{*n}(x) = K(x) * K(x) * \ldots * K(x), \tag{2.2.52}$$

produsul de convoluție avînd n factori.

Rămîne să demonstrăm că seria (2.2.51) este convergentă în K'_+; pentru aceasta este suficient să arătăm că fiecare termen al seriei, cu excepția primului termen, este mărginit în modul de termenul general al unei serii convergente în intervalul $[0, a]$. Astfel, dacă notăm $M_a = \max |K(x)|$ pe intervalul $[0, a]$, putem scrie

$$|K^{*2}(x)| = \left| \int_0^x K(x-t)\, K(t)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^x |K(x-t)\, K(t)|\, dt \leqslant x\, M_a^2, \quad x \in [0, a];$$

pe de altă parte, admiţînd că

$$|K^{*n}(x)| \leqslant \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} M_a^n, \quad x \in [0, a], \qquad (2.2.53)$$

rezultă

$$|K^{*n+1}(x)| = \left|\int_0^x K^{*n}(t)\, K(x-t)\, dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^x |K^{*n}(t)\, K(x-t)|\, dt \leqslant \int_0^x \frac{t^{n+1}}{(n-1)!} M_a^{n+1}\, dt = \frac{x^n}{n!} M_a^{n+1},$$

relaţia de majorare (2.2.53) fiind astfel verificată prin metoda inducţiei complete. Observînd că

$$\frac{x^n}{n!} M_a^{n+1} \leqslant \frac{a^n}{n!} M_a^{n+1},$$

rezultă că în intervalul $[0, a]$ seria considerată este majorată de seria numerică convergentă

$$M_a + \frac{a}{1!} M_a^2 + \frac{a^2}{2!} M_a^3 + \ldots + \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} M_a^n + \ldots, \qquad (2.2.54)$$

convergenţa dezvoltării (2.2.51) fiind astfel asigurată.

Pentru inversul lui $K_1(x)$ se obţine astfel o expresie de forma (2.2.50), unde

$$H(x) = -K(x) + K^{*2}(x) - K^{*3}(x) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n K^{*n}(x) + \ldots$$

Pentru $x < 0$ avem $H(x) = 0$. Dacă $K(x)$ este o funcţie continuă, atunci şi $H(x)$ va fi o funcţie continuă.

În baza teoremei 2.2.2, inversul lui $K_1(x)$ va fi unic.

Soluţia ecuaţiei (2.2.24′) se va exprima sub forma

$$y(x) = \theta(x) f(x) + H(x) * \theta(x) f(x) =$$

$$= \theta(x) f(x) + \theta(x) \int_0^x H(x-t) f(t)\, dt \qquad (2.2.55)$$

Scanned with OKEN Scanner

sau sub forma

$$y(x) = f(x) + \int_0^x H(x-t)\, f(t)\, dt, \quad x \geqslant 0.$$

Fie, de exemplu, ecuația

$$y(x) + \int_0^x y(t)\, dt = f(x), \quad x \geqslant 0; \tag{2.2.56}$$

observînd că $K_1(x) = \delta(x) + \theta(x)$, rezultă

$$H(x) = -\theta(x) + \theta^{*2}(x) - \theta^{*3}(x) + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n \theta^{*n}(x) + \ldots \tag{2.2.57}$$

Ținînd seama de formulele (1.3.27) și (1.3.28), putem scrie

$$\theta^{*n}(x) = \frac{\theta(x)}{(n-1)!}\, x^{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}\, x_+^{n-1}; \tag{2.2.58}$$

în acest caz, obținem

$$H(x) = -\theta(x) + \frac{\theta(x)}{1!}\, x - \frac{\theta(x)}{2!}\, x^2 + \ldots$$
$$\ldots (-1)^n \frac{\theta(x)}{(n-1)!}\, x^{n-1} + \ldots = -\theta(x)\, e^{-x}.$$

Căpătăm astfel

$$K_1^{-1}(x) = \delta(x) - \theta(x)\, e^{-x}, \tag{2.2.59}$$

soluția ecuației (2.2.56) scriindu-se sub forma

$$y(x) = f(x) - \int_0^x e^{-(x-t)}\, f(t)\, dt, \quad x \geqslant 0. \tag{2.2.60}$$

În particular, pentru $f(x) = e^{-x}$, obținem funcția

$$y(x) = (1 - x)\, e^{-x}, \quad x \geqslant 0,$$

care reprezintă soluția ecuației

$$y(x) + \int_0^x y(t)\, dt = e^{-x}, \quad x \geqslant 0.$$

Evident, dacă aplicăm transformata Laplace ecuației

$$[\delta(x) + \theta(x)] * K_1^{-1}(x) = \delta(x),$$

Scanned with OKEN Scanner

rezultă

$$L\left[K_1^{-1}(x)\right] = 1 - \frac{1}{p+1},$$

ceea ce ne conduce la același rezultat.

2.3. Problema Cauchy și probleme polilocale pentru ecuații diferențiale

2.3.1. *Ecuații diferențiale ordinare*

Studiul unei ecuații diferențiale constă, în general, în determinarea unei funcții de o anumită clasă, care verifică această ecuație, precum și anumite *condiții la limită*; aceste condiții corespund condițiilor concrete în care se desfășoară fenomenul descris de ecuația diferențială și dau posibilitatea determinării în mod unic a soluției problemei, în cazul în care aceasta este *pusă* în mod *corect*.

Între diferitele tipuri de condiții la limită ce se pot pune, vom considera întîi *condițiile de tip Cauchy* (numite și *condiții inițiale* în cazul în care variabila independentă este timpul); aceste condiții se pun într-un punct al intervalului (domeniului) pe care este definită ecuația diferențială.

De asemenea, vom considera și *condiții bilocale* sau *condiții polilocale*, care se pun în două sau mai multe puncte ale intervalului (domeniului) considerat.

2.3.1.1. Problema Cauchy

Fie $P\left(\frac{d}{dx}\right)$ un operator diferențial liniar de ordinul n, cu coeficienți variabili

$$P\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{d^n}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + a_n(x), \tag{2.3.1}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $a(x) \in C^0\,[a, b]$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Vom considera ecuaţia diferenţială liniară şi neomogenă

$$P\left(\frac{d}{dx}\right) y(x) = f(x), \quad f(x) \in C^0\,[a, b]. \qquad (2.3.2)$$

Definiţia 2.3.1. Numim *problemă Cauchy* pentru ecuaţia diferenţială (2.3.2) problema în care se cere determinarea unei funcţii $y(x) \in C^n[a, b]$, care satisface ecuaţia respectivă şi care, împreună cu derivatele sale pînă la ordinul $n - 1$, ia valorile

$$y_0 = y(x_0), y_0' = y'(x_0), y_0'' = y''(x_0), \ldots, y_0^{(n-1)} = y^{(n-1)}(x_0) \qquad (2.3.3)$$

într-un punct $x_0 \in (a, b)$.

Se poate demonstra că problema Cauchy admite o singură soluţie.

Ne propunem să rezolvăm problema Cauchy pentru ecuaţia diferenţială

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1} y'(x) + \\ + a_n y(x) = f(x), \quad x \geqslant 0, \qquad (2.3.4)$$

cu coeficienţii $a_i = \text{const}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, şi $f(x) \in \in C^0[0, \infty)$; vom determina soluţia care verifică această ecuaţie, precum şi condiţiile iniţiale

$$\lim_{x \to +0} y^{(k)}(x) = y_0^{(k)}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1), \qquad (2.3.5)$$

unde $y_0^{(k)}$ sînt numere date.

Observăm că rezolvarea acestei probleme pentru ecuaţia (2.3.4) este în strînsă legătură cu determinarea soluţiei fundamentale corespunzătoare.

Pentru a scrie ecuaţia (2.3.4) în distribuţii, vom prelungi funcţia dată $f(x)$, precum şi soluţia căutată $y(x)$ cu valori nule pentru $x < 0$, introducînd astfel funcţiile

$$\bar{f}(x) = \theta(x) f(x), \quad \bar{y}(x) = \theta(x) y(x) \qquad (2.3.6)$$

Scanned with OKEN Scanner

și distribuțiile regulate corespunzătoare. Condițiile inițiale reprezintă, în acest caz, salturile funcției $y(x)$ și ale derivatelor sale pînă la ordinul $n-1$ inclusiv, în punctul $x = 0$.

Ținînd seama de formula (1.2.32), putem scrie

$$\bar{y}^{(p)}(x) = \tilde{\bar{y}}^{(p)}(x) + \sum_{k=1}^{p} y_0^{(k-1)}\ \delta^{(p-k)}(x),\ (p = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.3.7}$$

unde $\tilde{\bar{y}}\ (x)$ reprezintă derivata de ordinul p în sens obișnuit, iar $\bar{y}^{(p)}(x)$ reprezintă derivata de ordinul p, în sensul teoriei distribuțiilor; notăm

$$F(x) = \bar{f}(x) + b_1\ \delta^{(n-1)}(x) + \ldots + b_{n-1}\ \delta'(x) + b_n\ \delta(x), \tag{2.3.8}$$

introducînd constantele

$$b_k = y_0^{(k-1)} + a_1 y_0^{(k-2)} + \ldots + a_{k-2}\ y_0' + a_{k-1}\ y_0,$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

Ecuația diferențială

$$\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\bar{y}(x) = F(x),\quad F(x) \in K'_+, \tag{2.3.9}$$

unde operatorul (2.3.1) se consideră cu coeficienți constanți, va fi astfel, scrisă în spațiul distribuțiilor, admițînd că distribuțiile $\bar{y}(x) \in K'_+$ pot fi și distribuții singulare; această ecuație are avantajul de a conține și condițiile inițiale ale problemei Cauchy, reprezentînd formularea în distribuții a acestei probleme.

Ecuația de convoluție corespunzătoare ecuației diferențiale (2.3.9) se va scrie

$$\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\delta(x) * \bar{y}(x) = F(x); \tag{2.3.9'}$$

inversul distribuției $\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\delta(x)$ în algebra de convoluție K'_+ va fi soluția elementară a ecuației (2.3.9'), deci soluția

Scanned with OKEN Scanner

fundamentală a ecuației diferențiale (2.3.9). Presupunînd că am determinat această soluție, notată cu $E(x)$, vom putea scrie

$$\bar{y}(x) = E(x) * F(x) = E(x) * \bar{f}(x) + b_1 E^{(n-1)}(x) + \ldots$$
$$\ldots + b_{n-1} E'(x) + b_n E(x), \qquad (2.3.10)$$

unde am ținut seama de formula (1.3.24).

Cu ajutorul metodei variației constantelor, putem exprima soluția fundamentală sub forma

$$E(x) = \theta(x)\, y_n(x), \qquad (2.3.11)$$

unde am folosit formula (2.1.42), $y_n(x)$ reprezentînd soluția ecuației omogene

$$P\left(\frac{d}{dx}\right) y(x) = 0, \quad x \geqslant 0, \qquad (2.3.12)$$

cu condiții inițiale de forma (2.1.44′); soluția (2.3.10) va fi

$$\bar{y}(x) = \theta(x)\, y_n(x) * \theta(x) f(x) + \theta(x)\, [b_1 y_n^{(n-1)}(x) + \ldots$$
$$\ldots + b_{n-1} y_n'(x) + b_n y_n(x)].$$

În acest caz, soluția ecuației (2.3.4), cu condițiile inițiale (2.3.5), se exprimă sub forma

$$y(x) = \int_0^x y_n(x-t) f(t)\, dt + b_1 y_n^{(n-1)}(x) + \ldots$$
$$\ldots + b_{n-1} y_n'(x) + b_n y_n(x), \qquad (2.3.13)$$

admițînd că $f(x)$ este o funcție local integrabilă. În particular, soluția ecuației omogene (2.3.12), cu condiții la limită de tip Cauchy (2.3.5), va fi

$$y(x) = b_1 y_n^{(n-1)}(x) + b_2 y_n^{(n-2)}(x) + \ldots + b_{n-1} y_n'(x) + b_n y_n(x). \qquad (2.3.14)$$

De exemplu, fie ecuația

$$y''(x) = 0, \quad x \geqslant 0, \qquad (2.3.15)$$

Scanned with OKEN Scanner

cu condiţiile iniţiale

$$\lim_{x \to +0} y(x) = y_0, \quad \lim_{x \to +0} y'(x) = y_0' ; \qquad (2.3.16)$$

observînd că $a_1 = a_2 = 0$ şi $b_1 = y_0$, $b_2 = y_0'$, obţinem

$$y(x) = y_0 + y_0' x,$$

unde am ţinut seama de faptul că $y_2(x) = x$ este soluţia ecuaţiei omogene (2.3.15), care verifică condiţiile

$$y_2(0) = 0, \; y_2'(0) = 1.$$

2.3.1.2. Probleme polilocale

Problema Cauchy, considerată pînă în prezent, este o problemă locală, condiţiile iniţiale punîndu-se într-un punct al intervalului (domeniului) pe care este definită ecuaţia.

Definiţia 2.3.2. Numim *problemă polilocală* pentru ecuaţia diferenţială (2.3.2) problema în care se cere determinarea unei funcţii $y(x) \in C^n[a, b]$, care satisface ecuaţia respectivă şi care ia valorile

$$y_1 = y(x_1), \; y_2 = y(x_2), \; \ldots, \; y_n = y(x_n) \qquad (2.3.17)$$

în punctele $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a, b)$.

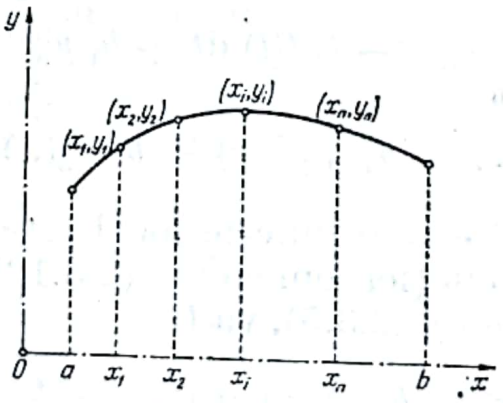


Fig. 2.2.

Observăm că pentru $x_i \neq x_j$, $(i \neq j)$, perechile (x_i, y_i), $(i = 1, 2, \ldots, n)$, determină n puncte distincte în plan (fig. 2.2); deci, din punct de vedere geometric, problema

Scanned with OKEN Scanner

polilocală constă în determinarea unei funcții care să satisfacă ecuația diferențială dată și al cărei grafic să treacă prin cele n puncte date.

Observăm că o problemă polilocală poate să aibă o soluție unică, poate să nu aibă nici o soluție sau poate să aibă o infinitate de soluții.

Fie $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ un sistem fundamental de soluții al ecuației diferențiale omogene (2.3.12), corespunzătoare ecuației diferențiale date (2.3.2), iar $y_0(x)$ o soluție particulară a acestei din urmă ecuații; soluția generală a ecuației (2.3.2) se va scrie sub forma

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x) + y_0(x), \tag{2.3.18}$$

unde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sînt constante nedeterminante. Punînd condițiile (2.3.17), obținem sistemul liniar de ecuații

$$\begin{aligned}
y_1 - y_0(x_1) &= C_1y_1(x_1) + C_2y_2(x_1) + \ldots + C_ny_n(x_1),\\
y_2 - y_0(x_2) &= C_1y_1(x_2) + C_2y_2(x_2) + \ldots + C_ny_n(x_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2.3.19)\\
y_n - y_0(x_n) &= C_1y_1(x_n) + C_2y_2(x_n) + \ldots + C_ny_n(x_n),
\end{aligned}$$

pentru determinarea constantelor $C_1, C_2, \ldots, C_n$; dacă determinantul sistemului este diferit de zero, problema polilocală are o soluție unică. În cazul în care determinantul sistemului (2.3.19) este nul, soluția problemei nu este unică sau problema polilocală nu are soluție.

De exemplu, pentru ecuația (2.3.15), cu condițiile la limită

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2, \tag{2.3.20}$$

un sistem fundamental de soluții este $y_1(x) = x$, $y_2(x) = 1$; observînd că $y_0(x) = 0$, scriem un sistem de ecuații liniare de forma

$$y_1 = C_1x_1 + C_2, \quad y_2 = C_1x_2 + C_2,$$

Scanned with OKEN Scanner

care ne conduce la soluția

$$y(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1, \quad x \in [x_1, x_2].$$

Se pot considera și alte condiții la limită și se pot astfel formula *probleme mixte* Cauchy și polilocale. Pentru ecuația diferențială (2.3.2) de ordinul n se pot da valorile funcției în $m < n$ puncte și valorile derivatelor de ordinul întîi în celelalte $n-m$ puncte, aparținînd intervalului (a, b):

$$y(x_i) = y_i, \; y'(x_j) = y'_j, \; (i = 1, 2, \ldots, m; \; j = m + 1, m + 2, \ldots, n). \tag{2.3.21}$$

De asemenea, se poate ca în mai multe puncte ale intervalului (a, b) să se dea valorile funcției și ale primelor sale derivate. În orice caz, numărul condițiilor impuse trebuie să fie egal cu ordinul ecuației diferențiale considerate.

2.3.2. *Ecuații diferențiale cu derivate parțiale*

2.3.2.1. Considerații generale. Soluții fundamentale

În cazul ecuațiilor diferențiale cu derivate parțiale se pun probleme analoage cu cele din cazul ecuațiilor diferențiale ordinare; în afara problemelor de tip Cauchy, se pun probleme la limită foarte variate, de exemplu *condiții pe contur* (*pe frontiera* unui domeniu pe care se verifică ecuația diferențială), care corespund condițiilor polilocale din cazul ecuațiilor diferențiale ordinare.

Fie operatorul diferențial liniar cu coeficienți variabili de ordinul m,

$$\mathrm{P}(x, \mathrm{D}) = \sum_{\alpha=0}^{m} a_\alpha(x)\mathrm{D}^\alpha, \; \mathrm{D} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right), \tag{2.3.22}$$

unde $a_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C^\infty$; notația folosită pune în evidență faptul că operatorul este polinomial, cu coeficienți variabili. Notația P(D) va corespunde aceluiași operator, în cazul în care coeficienții sînt constanți.

Scanned with OKEN Scanner

Vom considera ecuaţia

$$P(x, D)\, u(x) = f(x), \quad f(x) \in K', \quad x \in R^n. \qquad (2.3.23)$$

Definiţia 2.3.3. Numim *soluţie generalizată* a ecuaţiei (2.3.23) în domeniul $\Omega \subset R^n$ orice distribuţie $u(x) \in K'(R^n)$ care satisface această ecuaţie în domeniul considerat, în sensul teoriei distribuţiilor.

Prin urmare, dacă distribuţia $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este o soluţie generalizată a ecuaţiei (2.3.23), atunci pentru orice funcţie fundamentală $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, supp $\varphi \subset \Omega$, putem scrie

$$(P(x, D)\, u(x), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(x)), \quad \varphi \in K(\Omega), \quad x \in R^n. \qquad (2.3.24)$$

Evident, orice soluţie în sens obişnuit a ecuaţiei (2.3.23) este în acelaşi timp şi soluţie generalizată; reciproca acestei afirmaţii nu este, în general, adevărată. De exemplu, dacă $f(x)$ este o funcţie continuă în domeniul Ω, iar $u(x) \in C^m(\Omega)$ este o soluţie a ecuaţiei (2.3.23), atunci $u(x)$ reprezintă soluţia ecuaţiei atît în sens obişnuit, cît şi în sensul teoriei distribuţiilor (în sens generalizat); acest rezultat corespunde celui obţinut în cazul ecuaţiilor diferenţiale ordinare.

Într-adevăr, în cazul considerat derivatele de ordin maxim m în sens obişnuit şi în sensul teoriei distribuţiilor coincid. Deci $[P(x, D)\, u(x) - f(x)]$ este o funcţie continuă, nulă pentru orice $x \in \Omega\,(R^n)$; în acest caz, avem $P(x, D)\, u(x) - f(x) = 0$ şi în sens generalizat, deoarece pentru orice $\varphi(x) \in K(\Omega)$ avem

$$(P(x, D)\, u(x) - f(x), \varphi(x)) = 0, \quad \varphi(x) \in K(\Omega).$$

Definiţia 2.3.4. Numim *soluţie fundamentală* pentru operatorul diferenţial liniar cu coeficienţi constanţi $P(D)$, distribuţia $E(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K'(R^n)$, care satisface relaţia

$$P(D)\, E(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \delta(x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (2.3.25)$$

Observăm că pentru un operator $P(D)$ dat există o infinitate de soluţii fundamentale. Într-adevăr, dacă $E_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ reprezintă o soluţie a ecuaţiei

$$P(D)\, u(x) = 0, \quad x \in R^n, \qquad (2.3.26)$$

Scanned with OKEN Scanner

iar $E_+(x)$ reprezintă o soluţie particulară fundamentală a ecuaţiei neomogene (2.3.25), vom putea scrie o soluţie fundamentală sub forma

$$E(x) = E_0(x) + E_+(x), \tag{2.3.27}$$

astfel încît

$$\mathrm{P(D)}\, E(x) = \mathrm{P(D)}\, E_0(x) + \mathrm{P(D)}\, E_+(x) = \delta(x).$$

Se poate afirma că orice operator diferenţial liniar cu coeficienţi constanţi P(D) admite o soluţie fundamentală, deoarece ecuaţia (2.3.25) admite totdeauna o soluţie. Pentru determinarea acestei soluţii se folosesc adesea transformări integrale Fourier sau Laplace; de exemplu, aplicînd transformata Fourier ecuaţiei (2.3.25), obţinem

$$\mathrm{P}(-\mathrm{i}s_1, -\mathrm{i}s_2, \ldots, -\mathrm{i}s_n)\, F[E(x)] = 1,$$

de unde

$$F[E(x)] = \frac{1}{\mathrm{P}(-\mathrm{i}s_1, -\mathrm{i}s_2, \ldots, -\mathrm{i}s_n)}. \tag{2.3.28}$$

Ţinînd seama de faptul că P este un operator polinomial pentru obţinerea transformatei Fourier inverse va juca un rol esenţial descompunerea raportului (2.3.28) în fracţii simple. Observăm că

$$\mathrm{P(D)}[E(x) * f(x)] = \mathrm{P(D)}\, E(x) * f(x) = \delta(x) * f(x) = f(x).$$

Teorema 2.3.1. *Dacă distribuţia* $E(x) \in K'(R^n)$ *reprezintă soluţia fundamentală pentru operatorul diferenţial cu coeficienţi constanţi* P(D) *şi dacă distribuţia* $f(x) \in K'(R^n)$ *este astfel încît produsul de convoluţie* $E(x) * f(x)$ *există, atunci*

$$u(x) = E(x) * f(x) \tag{2.3.29}$$

reprezintă o soluţie pentru ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale, liniară, cu coeficienţi constanţi,

$$\mathrm{P(D)}\, u(x) = f(x), \quad f(x) \in K', \; x \in R^n. \tag{2.3.30}$$

Scanned with OKEN Scanner

Observăm că noţiunea de soluţie fundamentală are sens şi pentru anumite clase de ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi variabili, pentru care se poate enunţa o teoremă analoagă teoremei 2.3.1.

2.3.2.2. Ecuaţii de tip hiperbolic

În cele ce urmează vom considera *ecuaţia de tip hiperbolic*

$$\Box_a u(x_1, x_2, \ldots, x_n; t) = 0, \tag{2.3.31}$$

unde am introdus *operatorul lui d'Alembert*

$$\Box_a = \Delta - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{2.3.32}$$

în spaţiul $R^n \times R$, precum şi *operatorul lui Laplace*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}; \tag{2.3.33}$$

această ecuaţie reprezintă *ecuaţia undelor* în R^n.

Vom determina soluţia fundamentală corespunzătoare operatorului (2.3.32) în cazurile particulare $n = 1$, $n = 2$ şi $n = 3$.

Astfel, pentru $n = 1$ vom considera operatorul

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{2.3.34}$$

şi vom căuta o soluţie a ecuaţiei diferenţiale

$$\frac{\partial^2 E(x;t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 E(x;t)}{\partial t^2} = \delta(x;t) = \delta(x) \times \delta(t) \cdot \tag{2.3.35}$$

Aplicînd transformata Fourier în raport cu variabila x, obţinem

$$-\alpha^2 F_x[E(x;t)] - \frac{1}{a^2} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} F_x[E(x;t)] = 1(\alpha) \times \delta t,$$

Scanned with OKEN Scanner

unde α este variabila complexă corespunzătoare acestei transformate. Observăm că în membrul întîi apare un operator care ne conduce la o soluţie fundamentală de forma (2.1.35), aşa încît

$$F_x[E(x\,;t)] = -\frac{\theta(t)\,a}{\alpha}\sin a\alpha t, \quad a,\ \alpha > 0\,;$$

aplicînd transformata inversă Fourier, obţinem soluţia fundamentală

$$E(x\,;t) = -\frac{a}{2}\,\theta(t)\,\theta(at - |x|),\ a > 0, \quad (2.3.36)$$

unde am introdus distribuţia corespunzătoare unei funcţii caracteristice de interval (1.1.98). Mai putem scrie

$$E(x\,;t) = \begin{cases} -\dfrac{a}{2} & \text{pentru } |x| \leqslant at,\ t > 0,\ a > 0, \\ 0 & \text{în rest}\,; \end{cases} \quad (2.3.36')$$

deci $E(x\,;t)$ este o funcţie de două variabile ce ia valoarea $-\dfrac{a}{2}$ în interiorul conului din fig. 2.3, fiind nulă în exteriorul acestuia.

Folosind primul exemplu de la 1.4.1.3, se poate verifica direct că (2.3.36′) reprezintă soluţia fundamentală corespunzătoare ecuaţiei diferenţiale (2.3.35).

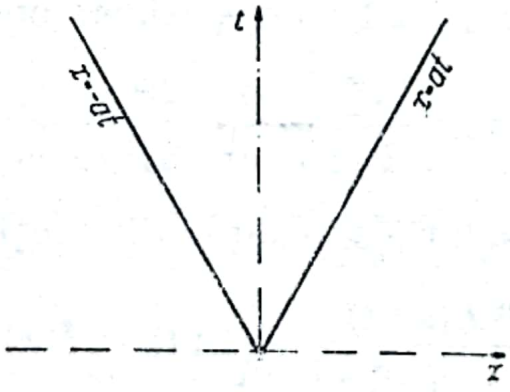


Fig. 2.3.

Dacă aplicăm transformata dublă Laplace în raport cu variabilele x şi t asupra ecuaţiei (2.3.35), obţinem

$$p_1^2 L_t[L_x[E(x;\,t)]] - \frac{1}{a^2}\,p_2^2 L_t[L_x[E(x\,;\,t)]] = 1,$$

Scanned with OKEN Scanner

unde p_1 este variabila complexă corespunzătoare variabilei x, iar p_2 este variabila complexă corespunzătoare variabilei t; rezultă

$$L_t[L_x[E(x\,;t)]]=\frac{a^2}{a^2p_1^2-p_2^2}=\frac{a}{2p_1}\left(\frac{1}{ap_1+p_2}+\frac{1}{ap_1-p_2}\right).$$

Efectuînd transformata Laplace inversă în raport cu variabila t, căpătăm

$$L_x[E(x\,;t)]=-\frac{a}{2p_1}\left(e^{ap_1t}-e^{-ap_1t}\right);$$

transformata Laplace inversă în raport cu variabila x ne conduce la aceeași soluție (2.3.36).

Vom considera acum ecuațiile

$$\Box_i u(x, y, z\,;t)=f(x, y, z;t),\quad (i=1, 2),\qquad (2.3.37)$$

unde operatorul lui d'Alembert este dat de

$$\Box_i=\Delta-\frac{1}{c_i^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2},\ (i=1, 2),\qquad (2.3.37')$$

c_i fiind *viteza de propagare a undelor longitudinale* ($i=1$) sau *viteza de propagare a undelor transversale* ($i=2$), iar $f(x, y, z\,;t)$ este o distribuție dată. Presupunem că ecuația este valabilă în tot spațiul, regularitatea fiind asigurată la infinit și condițiile inițiale fiind omogene (egale cu zero pentru $t=0$); folosind transformata Fourier în raport cu variabilele spațiale și transformata Laplace în raport cu timpul, putem scrie

$$-\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\frac{p^2}{c_i^2}\right)F[L[u]]=F[L[f]],$$

unde α, β, γ și p sînt noile variabile complexe care corespund variabilelor spațiale, respectiv variabilei temporale. Observînd că

$$F\left[\frac{1}{R}e^{-p\frac{R}{c_i}}\right]=\frac{4\pi}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\frac{p^2}{c_i^2}},\quad R=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$
$$(i=1, 2),\qquad (2.3.38)$$

Scanned with OKEN Scanner

obținem

$$u(x, y, z; t) = -\frac{1}{4\pi} L^{-1}\left[\frac{1}{R} e^{-p\frac{R}{c_i}} * L[f]\right], \quad (i = 1,2), \tag{2.3.39}$$

unde am considerat produsul de convoluție în raport cu variabilele spațiale.

Dacă

$$f(x, y, z; t) = -4\pi \varkappa(t) \times \delta(x, y, z), \tag{2.3.40}$$

unde $\varkappa(t)$ este o distribuție, rezultă

$$u(x, y, z; t) = L^{-1}\left[\frac{1}{R} e^{-p\frac{R}{c_i}}\right] *_{(t)} \varkappa(t), \quad (i = 1, 2), \tag{2.3.41}$$

unde intervine produsul de convoluție în raport cu variabila temporală. În felul acesta, soluția ecuației

$$\Box_i u(x, y, z; t) + 4\pi \varkappa(t) \times \delta(x, y, z) = 0, \quad (i = 1, 2), \tag{2.3.42}$$

va fi dată de

$$u(x, y, z; t) = \frac{1}{R} \varkappa\left(t - \frac{R}{c_i}\right), \quad (i = 1, 2), \tag{2.3.43}$$

unde am ținut seama de

$$L\left[\delta\left(t - \frac{R}{c_i}\right)\right] = e^{-p\frac{R}{c_i}}, \quad (i = 1, 2). \tag{2.3.44}$$

În particular, o soluție fundamentală a ecuațiilor (2.3.37) se va scrie

$$E(x, y, z; t) = -\frac{1}{4\pi R} \delta\left(t - \frac{R}{c_i}\right), \quad (i = 1, 2). \tag{2.3.45}$$

Fie acum ecuația

$$\Box_1 \Box_2 u(x, y, z; t) = f(x, y, z; t), \tag{2.3.46}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $f(x, y, z; t)$ este o distribuţie dată. În aceleaşi condiţii ca în cazul precedent, vom folosi transformările integrale şi vom scrie

$$\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\frac{p^2}{c_1^2}\right)\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\frac{p^2}{c_2^2}\right)F[L[u]]=F[L[f]];$$

de aici rezultă

$$F[L[u(x, y, z; t)]] =$$

$$=\frac{c_1^2\, c_2^2}{4\pi\, p^2(c_1^2-c_2^2)}\, F\left[\frac{1}{R}(e^{-p\frac{R}{c_1}}-e^{-p\frac{R}{c_2}})\right][F[L[f(x, y, z; t)]]], \tag{2.3.47}$$

unde am ţinut seama de descompunerea în fracţii simple

$$\frac{1}{\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\frac{p^2}{c_1^2}\right)\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\frac{p^2}{c_2^2}\right)}=$$

$$=\frac{c_1^2c_2^2}{p^2(c_1^2-c_2^2)}\left(\frac{1}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\frac{p^2}{c_1^2}}-\frac{1}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\frac{p^2}{c_2^2}}\right)$$

şi de formula (2.3.38). În acest caz, va rezulta

$$u(x, y, z; t)=\frac{c_1^2\, c_2^2}{4\pi(c_1^2-c_2^2)}\, L^{-1}\left[\frac{1}{p^2R}(e^{-p\frac{R}{c_1}}-e^{-p\frac{R}{c_2}})*L[f]\right], \tag{2.3.48}$$

unde am considerat produsul de convoluţie în raport cu variabilele spaţiale.

Dacă distribuţia $f(x, y, z; t)$ este de forma (2.3.40), rezultă

$$u(x, y, z; t)=-\frac{c_1^2\, c_2^2}{c_1^2-c_2^2}\, L^{-1}\left[\frac{1}{p^2R}(e^{-p\frac{R}{c_1}}-e^{-p\frac{R}{c_2}})\right]_{(t)}*\varkappa(t), \tag{2.3.49}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde intervine produsul de convoluţie în raport cu variabila temporală. În felul acesta, soluţia ecuaţiei

$$\Box_1 \Box_2 u(x, y, z; t) + 4\pi \varkappa(t) \times \delta(x, y, z) = 0 \quad (2.3.50)$$

va fi

$$u(x, y, z; t) = -\frac{c_1^2 c_2^2}{c_1^2 - c_2^2}\left[\left(t - \frac{R}{c_1}\right)_+ - \left(t - \frac{R}{c_2}\right)_+\right] \underset{(t)}{*} \varkappa(t), \quad (2.3.51)$$

unde am ţinut seama de

$$L\left[\left(t - \frac{R}{c_i}\right)_+\right] = \frac{1}{p^2} e^{-p\frac{R}{c_i}}, \ (i = 1, 2), \quad (2.3.52)$$

cu partea pozitivă a funcţiilor

$$\left(t - \frac{R}{c_i}\right)_+ = \left(t - \frac{R}{c_i}\right)\theta\left(t - \frac{R}{c_i}\right), \ (i = 1, 2). \quad (2.3.53)$$

În particular, o soluţie fundamentală a ecuaţiei (2.3.46) va fi de forma

$$E(x, y, z; t) = \frac{c_1^2 c_2^2}{4\pi (c_1^2 - c_2^2)}\left[\left(t - \frac{R}{c_1}\right)_+ - \left(t - \frac{R}{c_2}\right)_+\right]. \quad (2.3.54)$$

În cazul $n = 2$, vom considera ecuaţiile

$$\Box_i u(x, y; t) = f(x, y; t), \quad (i = 1, 2), \quad (2.3.55)$$

$$\Box_1 \Box_2 u(x, y; t) = f(x, y; t), \quad (2.3.56)$$

unde $f(x, y; t)$ este o distribuţie dată. Procedînd ca în cazul precedent şi ţinînd seama de transformata Fourier

$$F\left[K_0\left(p\frac{r}{c_i}\right)\right] = \frac{2\pi}{\alpha^2 + \beta^2 + \frac{p^2}{c_i^2}}, \quad (2.3.57)$$

$$\operatorname{Re} p > 0, \ r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (i = 1, 2),$$

Scanned with OKEN Scanner

unde K_0 reprezintă funcţia lui Bessel modificată de ordinul zero, găsim pentru ecuaţiile (2.3.55) integrala

$$u(x, y; t) = -\frac{1}{2\pi} L^{-1}\left[K_0\left(p\frac{r}{c_i}\right) * L[f]\right], \qquad (i = 1, 2), \tag{2.3.58}$$

unde produsul de convoluţie se referă la variabilele spaţiale.

Introducem distribuţia, definită de funcţia

$$f_0\left(t; \frac{r}{c_i}\right) = L^{-1}\left[K_0\left[p\frac{r}{c_i}\right)\right] = \frac{c_i\,\theta(t)\;\theta\,(c_i t - r)}{\sqrt{c_i^2 t^2 - r^2}} = \tag{2.3.59}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{pentru } 0 < t < \dfrac{r}{c_i}, \\ \dfrac{1}{\sqrt{t^2 - \dfrac{r^2}{c_i^2}}} & \text{pentru } t > \dfrac{r}{c_i}, \end{cases} \qquad (i = 1, 2);$$

în acest caz, la ecuaţiile (2.3.55) va corespunde soluţia fundamentală

$$E(x, y; t) = -\frac{1}{2\pi} f_0\left(t; \frac{r}{c_i}\right), \; (i = 1, 2). \tag{2.3.60}$$

În mod analog, pentru ecuaţia (2.3.56) putem scrie

$$u(x, y; t) = \frac{c_1^2 c_2^2}{2\pi(c_1^2 - c_2^2)} L^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\left[K_0\left(p\frac{r}{c_1}\right) - \right.\right. \tag{2.3.61}$$

$$\left.\left. - K_0\left(p\frac{r}{c_2}\right)\right] * L[f]\right],$$

produsul de convoluţie referindu-se la variabilele spaţiale.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă introducem distribuţia, definită de funcţia

$$f_{-2}\left(t\,;\,\frac{r}{c_i}\right)=L^{-1}\left[\frac{1}{p^2}K^0\left(p\,\frac{r}{c_i}\right)\right]=$$

$$=\theta(t)\;\theta(c_i\,t-r)\left[t\ln\left(t+\sqrt{t^2-\frac{r^2}{c_i^2}}\right)-\sqrt{t^2-\frac{r^2}{c_i^2}}\;\right]= \tag{2.3.62}$$

$$=\begin{cases}0 & \text{pentru } 0<t<\dfrac{r}{c_i},\\ & (i=1,\,2),\\ t\ln\left(t+\sqrt{t^2-\dfrac{r^2}{c_i^2}}\right)-\sqrt{t^2-\dfrac{r^2}{c_i^2}} & \text{pentru } t>\dfrac{r}{c_i},\end{cases}$$

obţinem soluţia fundamentală

$$E(x,\,y\,;\,t)=\frac{c_1^2\,c_2^2}{2\pi\,(c_1^2-c_2^2)}\left[f_{-2}\left(t\,;\,\frac{r}{c_1}\right)-f_{-2}\left(t\,;\,\frac{r}{c_2}\right)\right], \tag{2.3.63}$$

corespunzătoare ecuaţiei (2.3.56).

2.3.2.3. Ecuaţii de tip parabolic

În cele ce urmează vom considera *ecuaţia de tip parabolic*

$$\square_a u(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n\,;\,t)=0, \tag{2.3.64}$$

unde am introdus *operatorul lui Nicolescu*

$$\square_a=\Delta-\frac{1}{a}\,\frac{\partial}{\partial t} \tag{2.3.65}$$

în spaţiul $R^n\times R$.

Dacă $u(x\,;t)$ este variaţia de temperatură, pentru $n\leqslant 3$, atunci coeficientul a va reprezenta *difuzivitatea de temperatură* şi va fi

$$a=\frac{\lambda}{c\gamma}, \tag{2.3.66}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde c este *căldura specifică*, γ este *greutatea specifică*, iar λ este un *coeficient de conducție*; ecuația parabolică respectivă este, în acest caz, *ecuația lui Fourier de conducție a căldurii în solide*, în lipsa izvoarelor de căldură.

Pentru $n = 1$, vom considera operatorul

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t} \tag{2.3.67}$$

și vom căuta o soluție a ecuației diferențiale

$$\frac{\partial^2 u(x;t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a}\frac{\partial u(x;t)}{\partial t} = \delta(x) \times \delta(t) = \delta(x;t). \tag{2.3.68}$$

Aplicăm transformata Laplace în raport cu variabila t și transformata Fourier în raport cu variabila x; folosind noile variabile complexe p, respectiv α, obținem

$$-\alpha^2 L[F[u]] - \frac{p}{a} L[F[u]] = 1(\alpha) \times 1(p) = 1,$$

de unde

$$L[F[u]] = -\frac{a}{p + a\alpha^2}.$$

Transformata Laplace inversă ne conduce la

$$F[u(x;t)] = -a\theta(t)\, e^{-a\alpha^2 t},$$

iar transformata Fourier inversă ne permite să scriem

$$E(x;t) = -\frac{\theta(t)\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4at}}. \tag{2.3.69}$$

Dacă în ecuația de mai sus avem $a < 0$, obținem ecuația inversă de conducție a căldurii, iar dacă a este un număr pur imaginar, căpătăm *ecuația lui Schrödinger*, din mecanica cuantică, pentru un punct material (particulă) situat într-un cîmp de forțe conservative.

În cazul $n = 2$, soluția fundamentală va fi

$$E(x, y; t) = -\frac{\theta(t)}{4\pi t} e^{-\frac{r^2}{4at}}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{2.3.70}$$

Scanned with OKEN Scanner

iar în cazul $n = 3$ putem scrie

$$E(x, y, z; t) = -\frac{\theta(t)}{8\pi t\sqrt{\pi a t}}\, e^{-\frac{R^2}{4at}}, \quad R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{2.3.71}$$

2.3.2.4. Ecuaţii de tip eliptic

Fie *ecuaţia lui Poisson* de *tip eliptic*

$$\Delta u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{2.3.72}$$

definită în R^n, unde $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este o distribuţie dată.

În cazul $n = 3$ obţinem ecuaţia

$$\Delta\, u(x, y, z) = f(x, y, z); \tag{2.3.73}$$

vom considera şi *ecuaţia lui Poisson generalizată*

$$\Delta E(x, y, z) - k^2 E(x, y, z) = \delta(x, y, z) =$$

$$= \delta(x) \times \delta(y) \times \delta(z), \quad k = \text{const}, \tag{2.3.74}$$

unde am introdus distribuţia lui Dirac. Aplicînd transformata Fourier în raport cu toate cele trei variabile, obţinem

$$-(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\, F[E(x, y, z)] - k^2 F[E(x, y, z)] = 1,$$

unde α, β, γ sînt noile variabile complexe; rezultă

$$F[E(x, y, z)] = -\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + k^2}.$$

Observînd că

$$F^{-1}\left[\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + k^2}\right] = \frac{1}{4\pi R} e^{-kR}, R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \tag{2.3.75}$$

găsim soluţia fundamentală a ecuaţiei (2.3.74) sub forma

$$E(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi R}\, e^{-kR}. \tag{2.3.76}$$

Scanned with OKEN Scanner

În cazul particular $k = 0$, obținem pentru ecuația lui Poisson (2.3.73) o soluție fundamentală

$$E(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi R}. \tag{2.3.77}$$

Înlocuind pe k prin $-k$, găsim pentru ecuația (2.3.74) și soluția fundamentală conjugată

$$\bar{E}(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi R} e^{kR}.$$

Ținînd seama de relația

$$\operatorname{ch} kR = \frac{1}{2}(e^{kR} + e^{-kR}),$$

obținem și soluția fundamentală

$$\mathscr{E}(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi R} \operatorname{ch} k\, R; \tag{2.3.78}$$

cu ajutorul relației

$$\operatorname{sh} kR = \frac{1}{2}(e^{kR} - e^{-kR}),$$

obținem și o integrală a ecuației omogene

$$\Delta u(x, y, z) - k^2 u(x, y, z) = 0 \tag{2.3.79}$$

sub forma

$$u(x, y, z) = \frac{1}{R} \operatorname{sh} kR. \tag{2.3.80}$$

Înlocuind pe k prin $\pm ik$, unde i este unitatea imaginară, găsim soluțiile fundamentale complex conjugate

$$E(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi R} e^{-ikR},$$
$$\bar{E}(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi R} e^{ikR}, \tag{2.3.81}$$

pentru ecuaţia

$$\Delta u(x, y, z) + k^2 u(x, y, z) = f(x, y, z), \quad k = \text{const}, \tag{2.3.82}$$

unde $f(x, y, z)$ este o distribuţie dată.

Folosind relaţia

$$\cos kR = \frac{1}{2}(e^{ikR} + e^{-ikR}), \tag{2.3.83}$$

găsim şi soluţia fundamentală

$$\mathscr{E}(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi R}\cos kR;$$

de asemenea, cu ajutorul relaţiei

$$\sin kR = \frac{1}{2i}(e^{ikR} - e^{-ikR}), \tag{2.3.83'}$$

obţinem o integrală a *ecuaţiei omogene a lui Helmholtz*

$$\Delta u(x, y, z) + k^2 u(x, y, z) = 0, \tag{2.3.84}$$

sub forma

$$u(x, y, z) = \frac{1}{R}\sin kR. \tag{2.3.85}$$

Vom considera şi ecuaţia

$$\Delta\Delta u(x, y, z) = f(x, y, z), \tag{2.3.86}$$

unde $f(x, y, z)$ este o distribuţie dată. Pentru a găsi soluţia fundamentală corespunzătoare, vom folosi relaţia

$$\Delta(gh) = h\Delta g + g\Delta h + 2\left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial z}\right), \tag{2.3.87}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $g = g(x, y, z)$ este o funcţie indefinit derivabilă, iar $h = h(x, y, z)$ este o distribuţie; în acest caz, putem scrie

$$\Delta\left(\frac{1}{2} R^2 g\right) = \frac{1}{2} g\Delta(R^2) + \frac{1}{2} R^2 \Delta g +$$

$$+ \frac{\partial(R^2)}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial(R^2)}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial(R^2)}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial z},$$

unde

$$g = -\frac{1}{4\pi R}, \qquad \Delta g = \delta(x, y, z)$$

este soluţia fundamentală a ecuaţiei lui Poisson. Observînd că

$$\frac{\partial(R^2)}{\partial x} = 2x, \qquad \Delta(R^2) = 6, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{x}{R^3} \tag{2.3.88}$$

şi ţinînd seama de faptul că

$$R^2\, \delta(x, y, z) = 0, \tag{2.3.89}$$

rezultă

$$\Delta\left(\frac{1}{2} R^2 g\right) = -\frac{1}{4\pi R},$$

aşa încît

$$\Delta\Delta\left(\frac{1}{2} R^2 g\right) = \delta(x, y, z);$$

obţinem astfel o soluţie fundamentală a ecuaţiei (2.3.86)

$$E(x, y, z) = -\frac{R}{8\pi}. \tag{2.3.90}$$

În cazul a numai două variabile spaţiale, formula (1.4.36) ne permite să scriem o soluţie fundamentală a ecuaţiei lui Poisson

$$\Delta u(x, y) = f(x, y), \tag{2.3.91}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $f(x, y)$ este o distribuţie dată, sub forma

$$E(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}. \tag{2.3.92}$$

Folosind formula

$$\Delta(gh) = h\Delta g + g\Delta h + 2\left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y}\right),$$

unde $g(x, y)$ este o funcţie indefinit derivabilă, iar $h = h(x, y)$ este o distribuţie, putem scrie

$$\Delta\left(\frac{1}{4} r^2 g\right) = \frac{1}{4} g\Delta(r^2) + \frac{1}{4} r^2 \Delta g +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial(r^2)}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial(r^2)}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}\right],$$

cu

$$g = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}, \quad \Delta g = \delta(x, y).$$

Observînd că

$$\frac{\partial(r^2)}{\partial x} = 2x, \quad \Delta(r^2) = 4, \quad \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{1}{r} = -\frac{x}{r^2}$$

şi ţinînd seama de

$$r^2 \delta(x, y) = 0,$$

rezultă

$$\Delta\left(\frac{1}{4} r^2 g\right) = \frac{1}{2\pi}\left(1 - \ln \frac{1}{r}\right),$$

de unde

$$\Delta\Delta\left(\frac{1}{4} r^2 g\right) = \delta(x, y).$$

Scanned with OKEN Scanner

Obţinem astfel soluţia fundamentală

$$E(x, y) = -\frac{1}{8\pi} r^2 \ln \frac{1}{r} \tag{2.3.93}$$

pentru ecuaţia

$$\Delta\Delta u(x, y) = f(x, y), \tag{2.3.94}$$

$f(x, y)$ fiind o distribuţie dată.

2.3.2.5. **Problema Cauchy**

Vom considera ecuaţia cu derivate parţiale liniară şi cu coeficienţi constanţi

$$\mathrm{P}\left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x;t) = f(x;t),\ f(x;t) \in K'(R^{n+1}),\ x \in R^n, \tag{2.3.95}$$

pentru care se caută soluţia $u(x;\ t) \in K'(R^{n+1})$. Soluţia fundamentală $E(x;t)$ corespunde operatorului $\mathrm{P}\left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial t}\right)$ şi verifică ecuaţia

$$\mathrm{P}\left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial t}\right) E(x;\ t) = \delta(x;\ t). \tag{2.3.96}$$

Fie acum ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale, liniară, cu coeficienţi constanţi

$$\mathrm{P}\left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x;\ t) = 0, \tag{2.3.97}$$

de ordinul m în raport cu variabila t.

Definiţia 2.3.5. Numim *problemă Cauchy* pentru ecuaţia (2.3.97) problema în care se cere determinarea distribuţiei $u(x;\ t) \in K'(R^{n+1})$ ce verifică ecuaţia respectivă şi care,

Scanned with OKEN Scanner

împreună cu derivatele pînă la ordinul $m-1$, verifică condiţiile iniţiale $(t=0)$

$$u(x;+0)=u_0(x),\ \frac{\partial}{\partial t}u(x;+0)=u_1(x),\ldots$$

$$\ldots,\ \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}u(x;+0)=u_{m-1}(x), \tag{2.3.98}$$

unde $u_0(x), u_1(x),\ldots,u_{m-1}(x)$, $x\in R^n$, sînt distribuţii date.

Definiţia 2.3.6. Numim *soluţie fundamentală* pentru problema Cauchy corespunzătoare ecuaţiei (2.3.97) distribuţia $E(x;t)$ care satisface această ecuaţie şi care, împreună cu derivatele sale pînă la ordinul $m-1$, verifică condiţiile iniţiale

$$E(x;+0)=0,\ \frac{\partial}{\partial t}E(x;+0)=0,\ldots$$

$$\ldots,\ \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}}E(x;+0)=0,\ \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}E(x;+0)=\delta(x). \tag{2.3.99}$$

Teorema 2.3.2. *Dacă distribuţia $E(x;t)$ este astfel încît produsul de convoluţie $E(x;t)*u_{m-1}(x)$ are sens, atunci soluţia problemei Cauchy pentru ecuaţia* (2.3.97) *cu condiţiile iniţiale*

$$u(x;+0)=0,\ \frac{\partial}{\partial t}u(x;+0)=0,\ldots,\ \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}}u(x;+0)=0,$$

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}u(x;+0)=u_{m-1}(x) \tag{2.3.100}$$

se scrie sub forma

$$u(x;t)=E(x;t)*u_{m-1}(x). \tag{2.3.101}$$

Într-adevăr, putem scrie

$$\mathrm{P}\left(\frac{\partial}{\partial x};\frac{\partial}{\partial t}\right)u(x;t)=\mathrm{P}\left(\frac{\partial}{\partial x};\frac{\partial}{\partial t}\right)E(x;t)*u_{m-1}(x)=0,$$

Scanned with OKEN Scanner

ecuaţia (2.3.97) fiind astfel satisfăcută; putem scrie, de asemenea,

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} u(x\,;t) = \frac{\partial^k}{\partial t^k} [E(x\,;t) * u_{m-1}(x)] =$$

$$= \frac{\partial^k}{\partial t^k} E(x\,;t) * u_{m-1}(x), \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, m-1),$$

şi, ţinînd seama de relaţiile (2.3.99), constatăm că şi condiţiile iniţiale (2.3.100) sînt verificate.

Prin aplicarea succesivă a metodei descrise, se poate rezolva problema Cauchy pentru ecuaţia (2.3.97) cu condiţiile (2.3.98). Observăm că putem alege momentul iniţial $t = t_0 \neq 0$, fără a schimba cu nimic problema pusă.

Pentru rezolvarea problemei Cauchy, putem considera funcţia

$$\bar{u}(x\,;t) = \theta(t)\, u(x\,;t), \tag{2.3.102}$$

precum şi distribuţia regulată corespunzătoare; ţinînd seama de formula (1.2.32), care leagă derivata în sensul teoriei distribuţiilor de derivata în sens obişnuit, şi folosind condiţiile iniţiale (2.3.98), rezultă

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} \bar{u}(x\,;t) = \frac{\tilde{\partial}}{\partial t} \bar{u}(x\,;t) + u_0(x)\, \delta(t), \\
&\frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{u}(x\,;t) = \frac{\tilde{\partial}^2}{\partial t^2} \bar{u}(x\,;t) + u_1(x)\delta(t) + u_0(x)\dot{\delta}(t), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2.3.103) \\
&\frac{\partial^m}{\partial t^m} \bar{u}(x\,;t) = \frac{\tilde{\partial}^m}{\partial t^m} \bar{u}(x\,;t) + u_{m-1}(x)\delta(t) + \\
&+ u_{m-2}(x)\dot{\delta}(t) + \ldots + u_1(x)\delta^{(m-2)}(t) + u_0(x)\delta^{(m-1)}(t).
\end{aligned}$$

Observînd că derivatele în sens obişnuit în raport cu variabila t ale funcţiei $\bar{u}(x\,;t)$ sînt egale cu derivatele

Scanned with OKEN Scanner

corespunzătoare ale funcţiei $u(x\,;t)$ pentru $t > 0$, ecuaţia (2.3.97) capătă forma

$$\mathrm{P}\left(\frac{\partial}{\partial x}\,;\frac{\partial}{\partial t}\right)\bar{u}(x\,;t) = g(x\,;t), \qquad (2.3.104)$$

unde $g(x\,;t)$ este o distribuţie dată, care cuprinde condiţiile iniţiale. În acest caz, numim soluţie fundamentală a ecuaţiei (2.3.104) distribuţia $E(x\,;t)$, care satisface ecuaţia

$$\mathrm{P}\left(\frac{\partial}{\partial x}\,;\frac{\partial}{\partial t}\right)E(x\,;t) = \delta(x\,;t)\,; \qquad (2.3.105)$$

soluţia problemei Cauchy va fi astfel dată de

$$\bar{u}(x\,;t) = E(x\,;t) * g(x\,;t), \qquad (2.3.106)$$

produsul de convoluţie referindu-se la toate cele $n+1$ variabile. Acest mod de a introduce soluţia fundamentală în cazul problemei Cauchy este, evident, echivalent cu cel indicat mai înainte.

Să considerăm, de exemplu, ecuaţia de tip hiperbolic

$$\frac{\partial^2 u(x\,;t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\,\frac{\partial^2 u(x\,;t)}{\partial t^2} = f(x\,;t), \qquad (2.3.107)$$

cu condiţiile iniţiale

$$u(x\,;+0) = u_0(x),\quad \frac{\partial}{\partial t}u(x\,;+0) = u_1(x), \qquad (2.3.108)$$

unde $f(x\,;t)$ este o funcţie continuă pentru $t \geqslant 0$, iar $u_0(x) \in C^1(R)$, $u_1(x) \in C^0(R)$. Vom introduce funcţiile

$$\bar{u}(x\,;t) = \theta(t)\,u(x\,;t),\quad \bar{f}(x\,;t) = \theta(t)\,f(x\,;t), \qquad (2.3.109)$$

astfel încît ecuaţia (2.3.107) se transcrie

$$\frac{\tilde{\partial}^2 \bar{u}(x\,;t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\,\frac{\tilde{\partial}^2 \bar{u}(x\,;t)}{\partial t^2} = \bar{f}(x\,;t), \qquad (2.3.107')$$

Scanned with OKEN Scanner

unde am pus în evidenţă faptul că derivatele se calculează în sens obişnuit; condiţiile iniţiale (2.3.108) se scriu

$$\bar{u}(x\,;+0)=u_0(x),\quad \frac{\partial}{\partial t}\bar{u}(x\,;+0)=u_1(x),$$

unde salturile funcţiilor $\bar{u}(x\,;t)$ şi $\frac{\widetilde{\partial}}{\partial t}\bar{u}(x\,;t)$ se iau la momentul iniţial $t=0$. Putem astfel scrie

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{u}\,(x\,;t)=\frac{\widetilde{\partial}}{\partial t}\bar{u}(x\,;t)+u_0(x)\,\delta(t),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{u}(x\,;t)=\frac{\widetilde{\partial}^2}{\partial t^2}\bar{u}(x\,;t)+u_1(x)\,\delta(t)+u_0(x)\dot{\delta}(t)\,; \tag{2.3.110}$$

cu condiţiile impuse funcţiilor $u_0(x)$ şi $u_1(x)$, produsele $u_0(x)\delta(t)$, $u_0(x)\,\dot{\delta}(t)$ şi $u_1(x)\,\delta(t)$ au sens. Înlocuind în ecuaţia (2.3.107′), căpătăm ecuaţia (2.3.107) transcrisă în distribuţii sub forma

$$\frac{\partial^2\bar{u}(x\,;t)}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\bar{u}(x\,;t)}{\partial t^2}=$$

$$=\bar{f}(x\,;t)-\frac{1}{a^2}\left[u_1(x)\,\delta(t)+u_0(x)\,\dot{\delta}(t)\right]\,; \tag{2.3.107″}$$

această formă a ecuaţiei include şi condiţiile iniţiale care corespund problemei Cauchy puse.

Dacă $u_0(x)$, $u_1(x)\in K'(R)$, ecuaţia (2.3.107″) va avea forma

$$\frac{\partial^2\bar{u}(x\,;t)}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\bar{u}(x\,;t)}{\partial t^2}=$$

$$=\bar{f}(x\,;t)-\frac{1}{a^2}\left[u_1(x)\times\delta(t)+u_0(x)\times\dot{\delta}(t)\right], \tag{2.3.107‴}$$

unde se introduce produsul direct a două distribuţii; soluţia în distribuţii a problemei Cauchy va fi deci soluţia ecuaţiei (2.3.107‴).

Scanned with OKEN Scanner

Observînd că soluţia fundamentală corespunzătoare operatorului (2.3.34) este dată de (2.3.36), vom putea scrie soluţia ecuaţiei (2.3.107''') sub forma

$$\bar{u}(x\,;t) = -\frac{a}{2}\,\theta(t)\,\theta(at-|x|) * \Big[\bar{f}(x\,;t) -$$

$$-\frac{1}{a^2}\,u_1(x)\times\delta(t) - \frac{1}{a^2}\,u_0(x)\times\dot{\delta}(t)\Big],\ a>0; \qquad (2.3.111)$$

Dacă $g(x)\in K'(R^n)$, iar $h(x\,;t)\in K'(R^{n+1})$, se poate arăta că

$$h(x\,;t)*[g(x)\times\delta^{(k)}(t)] = \frac{\partial^k}{\partial t^k}\,h(x\,;t) * g(x)\ \ (k=0,1,2,\ldots), \qquad (2.3.112)$$

cu $\operatorname{supp} h(x\,;t)\subset\{x^2-a^2t^2\leqslant 0, t\geqslant 0\}$. Soluţia (2.3.111) capătă forma

$$u(x\,;t) = -\frac{a}{2}\,\theta(at-|x|) * \bar{f}(x\,;t) +$$

$$+\frac{1}{2a}\Big[\frac{\partial}{\partial t}\,\theta(at-|x|) * u_0(x) + \theta(at-|x|) * u_1(x)\Big],\ a>0,\ t\geqslant 0. \qquad (2.3.111')$$

Dacă $f(x\,;t)\in C^0$, $u_0(x)\in C^1$ şi $u_1(x)\in C^0$, putem scrie soluţia problemei Cauchy corespunzătoare ecuaţiei (2.3.107) sub forma

$$u(x\,;t) = -\frac{a}{2}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau +$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2}\,[u_0(x+at)+u_0(x-at)], \qquad (2.3.111'')$$

obţinînd astfel *formula lui d'Alembert*.

Scanned with OKEN Scanner

Între soluţia fundamentală a operatorului $P\left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial t}\right)$ şi soluţia fundamentală a problemei Cauchy pentru anumite clase de ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale există o legătură strînsă. Fie astfel ecuaţia de ordinul întîi în raport cu variabila t

$$\frac{\partial u(x;t)}{\partial t} - P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x;t) = 0, \quad x \in R^n. \tag{2.3.113}$$

Teorema 2.3.3. *Dacă $E(x;t)$ reprezintă soluţia fundamentală a problemei Cauchy pentru ecuaţia* (2.3.113), *atunci există o soluţie fundamentală a acestei ecuaţii sub forma*

$$\overline{E}(x;t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t < 0 \\ E(x;t) & \text{pentru } t \geqslant 0 \end{cases} = \theta(t)\, E(x;t), \tag{2.3.114}$$

Într-adevăr, putem scrie

$$\begin{gathered} \frac{\partial E(x;t)}{\partial t} - P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) E(x;t) = 0, \quad t > 0, \\ E(x;0) = \delta(x); \end{gathered} \tag{2.3.115}$$

deci, aplicînd transformata Fourier în raport cu variabilele spaţiale, obţinem

$$\frac{d\widetilde{E}(\alpha;t)}{dt} - P(-i\alpha)\, \widetilde{E}(\alpha;t) = 0, \quad t > 0,$$

$$\widetilde{E}(\alpha;0) = 1,$$

unde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ reprezintă noile variabile complexe. Dar pentru $t \geqslant 0$ avem $E(x;t) = \overline{E}(x;t)$, astfel încît putem scrie

$$\frac{d\widetilde{\overline{E}}(\alpha;t)}{dt} - P(-i\alpha)\, \widetilde{\overline{E}}(\alpha;t) = 0, \quad t > 0,$$

$$\widetilde{\overline{E}}(\alpha;0) = 1,$$

Scanned with OKEN Scanner

derivata în raport cu timpul fiind considerată în sens obișnuit; observăm că această ecuație este valabilă și pentru $t < 0$. Deoarece $\widetilde{\widetilde{E}}(\alpha; 0)$ reprezintă saltul lui $\widetilde{\widetilde{E}}(\alpha; t)$ la momentul $t = 0$, rezultă că între derivata în sens obișnuit și derivata în sensul teoriei distribuțiilor are loc relația

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widetilde{\widetilde{E}}(\alpha; t) = \frac{\widetilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\widetilde{\widetilde{E}}(\alpha; t) + \delta(t);$$

în acest caz rezultă

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widetilde{\widetilde{E}}(\alpha; t) - \mathrm{P}(-\mathrm{i}\alpha)\,\widetilde{\widetilde{E}}(\alpha; t) = \delta(t).$$

Aplicînd transformata Fourier în raport cu timpul, obținem

$$-\mathrm{i}p\,\widetilde{\widetilde{E}}(\alpha; p) - \mathrm{P}(-\mathrm{i}\alpha)\,\widetilde{\widetilde{E}}(\alpha; p) = 1,$$

unde p este noua variabilă complexă; observăm că aceasta reprezintă transformata Fourier a ecuației

$$\frac{\partial \bar{E}(x; t)}{\partial t} - \mathrm{P}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\bar{E}(x; t) = \delta(x; t), \qquad (2.3.116)$$

în raport cu ambele variabile, teorema enunțată fiind astfel demonstrată.

În particular, fie ecuația de propagare a căldurii

$$\frac{\partial u(x; t)}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u(x; t)}{\partial x^2} = 0, \quad x \in R; \qquad (2.3.117)$$

problema Cauchy corespunzătoare constă în determinarea distribuției $u(x; t)$ care satisface această ecuație, precum și condiția inițială

$$u(x; 0) = u_0(x), \qquad (2.3.118)$$

unde $u_0(x)$ este o distribuție dată. Soluția fundamentală este dată de formula (2.3.69). Aplicînd teorema 2.3.3, rezultă că soluția fundamentală a problemei Cauchy este

$$E(x; t) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi a t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4at}}, \quad t > 0; \qquad (2.3.119)$$

Scanned with OKEN Scanner

această soluție verifică deci ecuația

$$\frac{\partial E(x;t)}{\partial t} - a\frac{\partial^2 E(x;t)}{\partial x^2} = 0, \quad t > 0, \qquad (2.3.120)$$

și condiția inițială

$$E(x;0) = \delta(x). \qquad (2.3.120')$$

Prin urmare, $E(x;t)$ formează un șir reprezentativ δ, timpul t fiind un parametru; într-adevăr, folosind integrala lui Poisson (1.3.31), se verifică relația

$$\int_{-\infty}^{\infty} E(x;t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Soluția problemei Cauchy pentru ecuația (2.3.117) cu condiția inițială (2.3.118) va fi

$$u(x;t) = E(x;t) * u_0(x), \; t > 0. \qquad (2.3.121)$$

Dacă $u_0(x)$ este o distribuție cu suport compact, atunci produsul de convoluție are sens; de asemenea, dacă $u_0(x)$ este o funcție mărginită sau integrabilă pe R, atunci

$$u(x;t) = \int_{-\infty}^{\infty} E(x-\xi;t)\,u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \; t > 0.$$

Putem enunța o teoremă similară teoremei 2.3.3 și în cazul în care apar derivate de ordin superior ale variabilei temporale; vom ilustra aceasta cu ajutorul ecuației (2.3.31) a undelor în R^n. Soluția fundamentală $E(x;t)$ pentru problema Cauchy corespunzătoare acestei ecuații va satisface relațiile

$$\Box_a E(x;t) = 0, \quad t > 0, \qquad (2.3.122)$$

$$E(x;0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}E(x;0) = \delta(x).$$

Teorema 2.3.4. *Dacă $E(x;t)$ reprezintă soluția fundamentală a problemei Cauchy pentru ecuația* (2.3.31), *atunci există o soluție fundamentală de forma* (2.3.114), *care verifică ecuația*

$$\frac{\partial^2 \bar{E}(x;t)}{\partial t^2} - a^2\,\Delta\,\bar{E}(x;t) = \delta(x;t). \qquad (2.3.123)$$

Scanned with OKEN Scanner

Aplicînd transformata Fourier în raport cu variabilele spaţiale relaţiilor (2.3.122), putem scrie

$$\alpha^2 \widetilde{E}(\alpha\,;t) + \frac{1}{a^2}\frac{\mathrm{d}^2\widetilde{E}(\alpha\,;t)}{\mathrm{d}t^2} = 0,\ t>0,$$

$$\widetilde{E}(\alpha\,;0) = 0,\quad \frac{\mathrm{d}\widetilde{E}(\alpha;0)}{\mathrm{d}t} = 1,$$

unde am introdus notaţia

$$\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2\,;$$

ţinînd seama de relaţia (2.3.114), vom putea scrie ecuaţia

$$\alpha^2 \widetilde{\overline{E}}(\alpha\,;t) + \frac{1}{a^2}\frac{\mathrm{d}^2\widetilde{\overline{E}}(\alpha\,;t)}{\mathrm{d}t^2} = 0,$$

valabilă pentru $t>0$ şi pentru $t<0$, derivatele fiind considerate în sens obişnuit. De asemenea, putem scrie

$$\widetilde{\overline{E}}(\alpha\,;0) = 0,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widetilde{E}(\alpha\,;0) = 1,$$

de unde rezultă relaţiile

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{\overline{E}}(\alpha\,;t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\,\overline{E}(\alpha\,;t)}{\mathrm{d}t},\quad \frac{\mathrm{d}^2\overline{E}(\alpha;\,t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\widetilde{\mathrm{d}}^2\widetilde{\overline{E}}(\alpha\,;t)}{\mathrm{d}t^2} + \delta(t),$$

care au loc între derivatele în sens obişnuit şi derivatele în sensul teoriei distribuţiilor. În felul acesta, obţinem

$$\frac{\mathrm{d}^2\widetilde{\overline{E}}(\alpha\,;t)}{\mathrm{d}t^2} + a^2\alpha^2\,\widetilde{\overline{E}}(\alpha\,;\,t) = \delta(t)$$

şi, aplicînd transformata Fourier în raport cu timpul,

$$(-ip)^2\,\widetilde{\overline{E}}(\alpha\,;p) + a^2\alpha^2\,\widetilde{\overline{E}}(\alpha\,;p) = 1.$$

Ajungem astfel la transformata Fourier a ecuaţiei (2.3.123), teorema enunţată fiind deci demonstrată.

Distribuţia

$$u(x\,;t) = E(x\,;t) * u_1(x),\quad x\in R^n,\ t>0, \qquad (2.3.124)$$

Scanned with OKEN Scanner

reprezintă astfel soluţia problemei Cauchy pentru ecuaţia (2.3.31), cu condiţiile iniţiale

$$u(x\,;0) = 0,\ \frac{\partial}{\partial t}u(x\,;0) = u_1(x), \qquad (2.3.125)$$

unde $u_1(x)$ este o distribuţie dată ; convoluţia se consideră în raport cu variabila spaţială x, timpul t fiind un parametru.

În particular, dacă $n = 1$, obţinem *ecuaţia coardei vibrante*

$$\frac{\partial^2 u(x\,;t)}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u(x\,;t)}{\partial x^2} = 0,\quad x\in R,\ t>0\,; \qquad (2.3.126)$$

soluţia fundamentală a acestei ecuaţii este

$$\bar{E}(x\,;t) = \frac{1}{2a}\,\theta(t)\,\theta(at - |x|), \qquad (2.3.127)$$

deci, conform teoremei demonstrate, soluţia fundamentală pentru problema Cauchy este

$$E(x\,;t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} & \text{pentru } |x| \leqslant at, \\ 0 & \text{pentru } |x| > at, \end{cases} \qquad t>0.$$

Prin urmare, soluţia ecuaţiei (2.3.126) cu condiţiile iniţiale (2.3.125) este dată de produsul de convoluţie

$$u(x\,;t) = \frac{1}{2a}\,\theta(at - |x|) * u_1(x),\ t>0\,; \qquad (2.3.128)$$

deoarece $E(x\,;t)$ este o distribuţie cu suport compact, acest produs de convoluţie are sens pentru orice distribuţie $u_1(x)$. Dacă $u_1(x)$ este o funcţie continuă, putem scrie

$$u(x\,;t) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_1(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi. \qquad (2.3.129)$$

În general, se poate considera problema Cauchy cu condiţiile iniţiale (2.3.108). Pentru ecuaţia

$$\frac{\partial^2 v_1(x\,;t)}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 v_1(x;\,t)}{\partial x^2} = 0,\quad t>0,$$

Scanned with OKEN Scanner

cu condiţiile iniţiale

$$v_1(x\,;0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} v_1(x\,;0) = u_0(x),$$

putem scrie, în baza rezultatului obţinut, soluţia

$$v_1(x\,;t) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,;$$

derivînd această ecuaţie în raport cu timpul, găsim

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial v_1(x\,;t)}{\partial t}\right] - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial v_1(x\,;t)}{\partial t}\right] = 0,$$

ceea ce ne arată că derivata $v_2(x\,;t) = \dfrac{\partial v_1(x\,;t)}{\partial t}$ satisface ecuaţia coardei vibrante şi condiţia $v_2(x\,;0) = u_0(x)$.

Aplicînd formula de derivare în raport cu un parametru

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x\,;t)\,\mathrm{d}x = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(x\,;t)}{\partial t}\,\mathrm{d}x + f(b\,;t)\,\frac{\mathrm{d}b(t)}{\mathrm{d}t} - f(a\,;t)\,\frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t} \qquad (2.3.130)$$

şi admiţînd că funcţia $u_0(x) \in C^1$, obţinem

$$v_2(x\,;t) = \frac{1}{2}\left[u_0(x+at) + u_0(x-at)\right], \quad \frac{\partial}{\partial t} v_2(x\,;t) = 0.$$

Suprapunînd soluţia $v_2(x\,;t)$ cu soluţia (2.3.129), regăsim formula lui d'Alembert (2.3.111''), corespunzătoare problemei Cauchy cu condiţiile iniţiale (2.3.108).

Scanned with OKEN Scanner

REPREZENTAREA PRIN DISTRIBUȚII A UNOR MĂRIMI MECANICE ȘI FIZICE

3.1. Reprezentarea prin distribuții a vectorilor legați

Un *vector legat* este o entitate matematică, caracterizată printr-o *direcție*, un *sens*, o *mărime* (*modul*) și un *punct de aplicație* ; vom reprezenta un vector legat în spațiul E_3 cu ajutorul unui segment de dreaptă orientat. Fiind aplicat într-un punct, vectorul legat ne conduce la o singularitate ; pentru reprezentarea sa matematică sînt utile distribuțiile singulare, în particular distribuția lui Dirac.

3.1.1. *Reprezentarea unui vector legat*

3.1.1.1. Caz particular

Fie un cîmp de vectori de mărime $V_a(x)$, acționînd normal la axa Ox, pe $[-a, a]$, $a > 0$, în sensul pozitiv al axei Oy ; admițînd că pe acest interval repartiția de vectori, de mărime $\frac{P}{2a}$ (fig. 3.1, *a*) este uniformă, putem scrie

$$V_a(x) = \begin{cases} \frac{P}{2a} & \text{pentru } x \in [-a, a], \\ 0 & \text{pentru } |x| > a. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Folosind şirul reprezentativ δ, format cu funcţiile $h_a(x)$, definite de formula (1.2.91), putem exprima mărimea acestui cîmp de vectori sub forma

$$V_a(x) = P\, h_a(x).$$

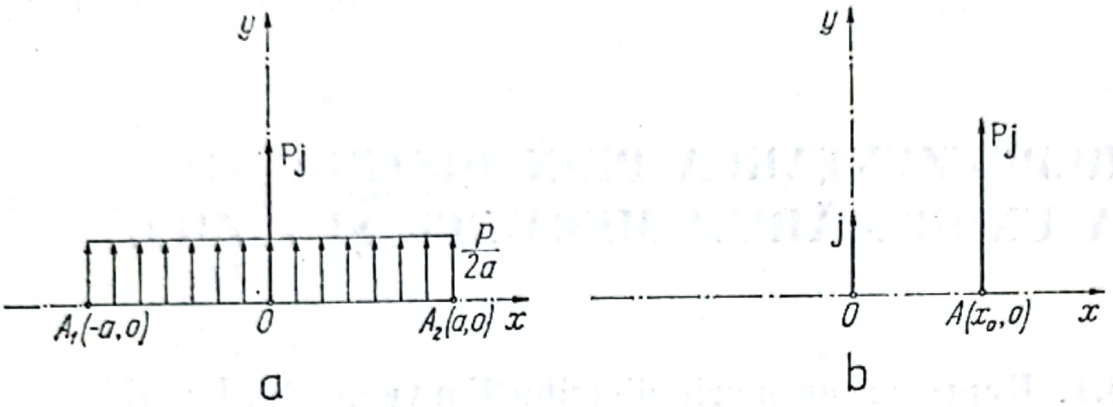


Fig. 3.1.

Observăm că, pentru $a \to +0$, lungimea segmentului $[-a, a]$ tinde către zero, iar mărimea $\dfrac{P}{2a}$ a vectorilor tinde, în sens obişnuit, către infinit; considerînd limita cîmpului de vectori pentru $a \to +0$, în sensul teoriei distribuţiilor, obţinem

$$V(x) = \lim_{a \to +0} V_a(x) = P \lim_{a \to +0} h_a(x) = P\, \delta(x). \qquad (3.1.2)$$

Aceasta constituie reprezentarea matematică a mărimii unui vector legat, normal pe axa Ox, îndreptat în sensul pozitiv al axei Oy şi aplicat în origine. Observăm că mărimea rezultantei cîmpului de vectori considerat este P; vectorial, putem scrie

$$\mathbf{Q}(x) = V(x)\, \mathbf{j} = P\mathbf{j}\, \delta(x), \qquad (3.1.2')$$

unde $\mathbf{j}$ este versorul axei Oy. Astfel, $\mathbf{Q}(x)$ reprezintă *cîmpul de vectori echivalent* cu vectorul legat $P\mathbf{j}$, aplicat în origine; putem considera că acest cîmp echivalent reprezintă *densitatea liniară* a vectorului legat $P\mathbf{j}$. Dacă vectorul legat $P\mathbf{j}$ este aplicat într-un punct A de abscisă x_0 (fig. 3.1, *b*), cîmpul vectorial echivalent obţinut din

Scanned with OKEN Scanner

(3.1.2′) printr-o translație în punctul de abscisă x_0 va fi

$$\mathbf{Q}(x) = P\mathbf{j}\ \delta(x - x_0). \tag{3.1.3}$$

Observăm că funcția $h_a(x)$ a jucat un rol auxiliar, în locul ei putînd folosi orice alt șir reprezentativ δ. Să considerăm

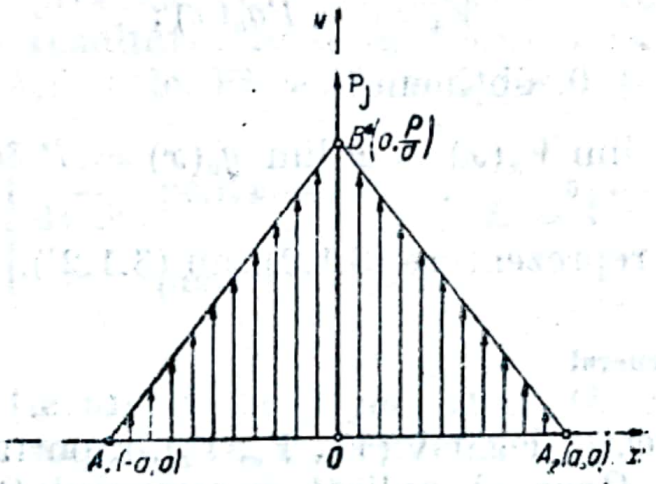


Fig. 3.2.

astfel și cîmpul de vectori de mărime $V_a(x)$, normal la axa Ox, în sensul pozitiv al axei Oy, definit prin (fig. 3.2)

$$V_a(x) = \begin{cases} \dfrac{P}{a}\left(1 + \dfrac{x}{a}\right) & \text{pentru } x \in [-a, 0], \\ \dfrac{P}{a}\left(1 - \dfrac{x}{a}\right) & \text{pentru } x \in [0, a], P > 0, \\ 0 & \text{pentru } |x| > a; \end{cases} \tag{3.1.4}$$

acest cîmp vectorial este repartizat după un triunghi isoscel de arie P.

Ținînd seama de formula (1.2.90), unde facem $n = \dfrac{1}{a}$, observăm că funcțiile

$$g_a(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\left(1 + \dfrac{x}{a}\right) & \text{pentru } x \in [-a, 0], \\ \dfrac{1}{a}\left(1 - \dfrac{x}{a}\right) & \text{pentru } x \in [0, a], \\ 0 & \text{pentru } |x| > a \end{cases} \tag{3.1.5}$$

formează un șir reprezentativ δ, astfel încît

$$\lim_{a \to +0} g_a(x) = \delta(x). \qquad (3.1.5')$$

Vom putea exprima mărimea (3.1.4) a cîmpului de vectori sub forma

$$V_a(x) = P g_a(x);$$

pentru $a \to +0$, obținem

$$V(x) = \lim_{a \to +0} V_a(x) = P \lim_{a \to +0} g_a(x) = P\ \delta(x), \qquad (3.1.6)$$

deci aceeași reprezentare (3.1.2) sau (3.1.2').

3.1.1.2. Caz general

Fie un vector legat $\mathbf{V}\ (V_x, V_y, V_z)$, raportat la un reper ortonormal $Oxyz$ și aplicat în punctul O. Considerăm domeniul deformabil Ω_ε care cuprinde originea axelor de coordonate și astfel încît, pentru $\varepsilon \to +0$, Ω_ε să tindă către punctul O; pe acest domeniu definim cîmpul de vectori $\mathbf{Q}_\varepsilon(x, y, z)$, de componente $V_x f_\varepsilon(x, y, z)$, $V_y g_\varepsilon(x, y, z)$, $V_z h_\varepsilon(x, y, z)$, cu condiția ca f_ε, g_ε și h_ε să fie șiruri reprezentative δ, adică

$$\lim_{\varepsilon \to +0} f_\varepsilon(x, y, z) = \lim_{\varepsilon \to +0} g_\varepsilon(x, y, z) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} h_\varepsilon(x, y, z) = \delta(x, y, z). \qquad (3.1.7)$$

Trecînd la limită în sensul teoriei distribuțiilor, obținem cîmpul de vectori echivalent cu vectorul legat $\mathbf{V}$:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = \mathbf{Q}(x, y, z) = \lim_{\varepsilon \to +0} \mathbf{Q}_\varepsilon(x, y, z) = V_x\, \mathbf{i}\ \delta(x, y, z) +$$

$$+ V_y\, \mathbf{j}\ \delta(x, y, z) + V_z\, \mathbf{k}\ \delta(x, y, z) = \mathbf{V}\ \delta(x, y, z) = \mathbf{V}\ \delta(\mathbf{r}), \qquad (3.1.8)$$

unde $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ sînt versorii axelor de coordonate, iar $\mathbf{r}$ este vectorul de poziție al punctului (x, y, z); cîmpul de vectori $\mathbf{Q}(\mathbf{r})$ poate fi considerat drept *densitate volumică* a vectorului legat $\mathbf{V}$. Dacă vectorul legat $\mathbf{V}$ se aplică într-un punct

Scanned with OKEN Scanner

A de vector de poziţie $\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0)$, atunci cîmpul vectorial echivalent va fi dat de

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = \mathbf{V}\,\delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \mathbf{V}\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (3.1.9)$$

Pentru reprezentarea vectorului legat $\mathbf{V}$ putem să folosim un şir reprezentativ δ oarecare, deoarece acesta nu intervine în rezultatul final prin forma sa concretă, ci prin proprietăţile sale. Fie astfel funcţia

$$f_\varepsilon(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{3}{4\pi\varepsilon^3} & \text{pentru } R < \varepsilon, \\ 0 & \text{pentru } R > \varepsilon, \end{cases} \qquad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad (3.1.10)$$

această funcţie are drept suport sfera Ω_ε cu centrul în origine şi de rază $R = \varepsilon$. Funcţiile $f_\varepsilon(x, y, z)$ formează un şir reprezentativ δ, astfel încît

$$\lim_{\varepsilon \to +0} f_\varepsilon(x, y, z) = \delta(x, y, z). \quad (3.1.11)$$

Într-adevăr, pentru o funcţie fundamentală $\varphi(x, y, z) \in K(R^3)$, putem scrie

$$(f_\varepsilon(x, y, z),\ \varphi(x, y, z)) = \int_{R^3} f_\varepsilon(x, y, z)\ \varphi(x, y, z)\ \mathrm{d}\Omega =$$

$$= \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int_{\Omega\varepsilon} \varphi(x, y, z)\ \mathrm{d}\Omega = \varphi(\xi, \eta, \zeta), \quad (\xi, \eta, \zeta) \in \Omega_\varepsilon,$$

unde am aplicat formula mediei pentru integrale triple; obţinem

$$\lim_{\varepsilon \to +0} (f_\varepsilon(x, y, z),\ \varphi(x, y, z)) = (\lim_{\varepsilon \to +0} f_\varepsilon\,(x, y, z),\ \varphi(x, y, z)) =$$

$$= \varphi(0, 0, 0) = (\delta(x, y, z),\ \varphi(x, y, z)),$$

relaţia (3.1.11) fiind astfel demonstrată.

Să considerăm acum cîmpul de vectori paraleli

$$\mathbf{Q}_\varepsilon(x, y, z) = \mathbf{V} f_\varepsilon\,(x, y, z), \quad (3.1.12)$$

Scanned with OKEN Scanner

definit pe sfera Ω_ε, cu centrul în origine și de rază ε. Trecînd la limită, în sensul teoriei distribuțiilor, obținem

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = \mathbf{Q}(x, y, z) = \lim_{\varepsilon \to +0} \mathbf{Q}_\varepsilon(x, y, z) = \mathbf{V} \lim_{\varepsilon \to +0} f_\varepsilon(x, y, z) =$$

$$= \mathbf{V}\, \delta(x, y, z) = \mathbf{V}\, \delta(\mathbf{r}). \qquad (3.1.13)$$

Pentru a pune în evidență corectitudinea acestei reprezentări, vom calcula torsorul cîmpului de vectori considerat, în punctul O. Obținem astfel rezultanta

$$\mathbf{R}_\varepsilon = \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{Q}_\varepsilon \, d\Omega = \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{V} f_\varepsilon \, d\Omega = \mathbf{V} \int_{\Omega_\delta} f_\varepsilon \, d\Omega, \qquad (3.1.14)$$

de unde, trecînd la limită pentru $\varepsilon \to +0$, se obține

$$\mathbf{R} = \mathbf{V}. \qquad (3.1.15)$$

Momentul rezultant se va scrie

$$\mathbf{M}_\varepsilon = \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{r} \times \mathbf{Q}_\varepsilon d\Omega = \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{r} \times \mathbf{V}\, d\Omega =$$

$$= -\frac{3}{4\pi\varepsilon^3}\, \mathbf{V} \times \int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{r}\, d\Omega = 0,$$

unde s-a ținut seama de faptul că

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \mathbf{r}\, d\Omega = 0, \qquad (3.1.16)$$

integrala corespunzînd la momentul static al sferei omogene Ω_ε în raport cu centrul ei; evident că $\mathbf{M}_0 = 0$, reprezentarea (3.1.13) fiind astfel justificată din punct de vedere mecanic.

3.1.2. *Compunerea vectorilor legați*

Fie $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \ldots, \mathbf{V}_n$ un sistem de n vectori legați, aplicați în punctul $A(x_0, y_0, z_0)$ (fig. 3.3); cîmpurile vectoriale echivalente vor fi date de

$$\mathbf{Q}_i(\mathbf{r}) = \mathbf{V}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (3.1.17)$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă introducem vectorul rezultant

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}_i, \tag{3.1.18}$$

aplicat în același punct A, putem scrie cîmpul de vectori echivalent astfel :

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Q}_i(\mathbf{r}) = \mathbf{R}\ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \tag{3.1.19}$$

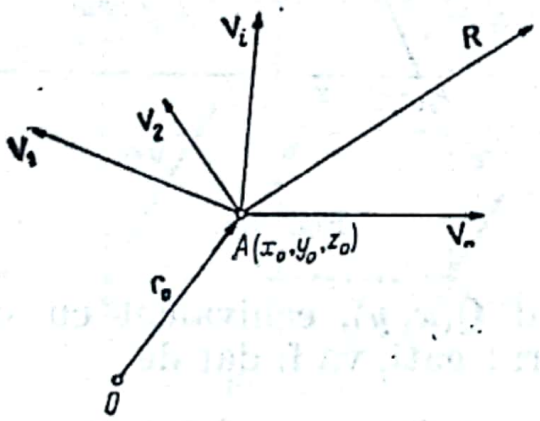


Fig. 3.3.

Deci proprietățile vectorilor legați, aplicați în același punct, se păstrează și în reprezentarea lor prin distribuții.

În cazul unor vectori legați, avînd puncte de aplicație diferite, nu se poate vorbi de compunerea vectorilor. Totuși, în unele cazuri, putem da o reprezentare în distribuții a unui sistem format din doi vectori legați. În cazul unui sistem de $n > 2$ vectori, aplicați în puncte diferite, se poate încerca compunerea vectorilor în continuare, dacă aceștia sînt paraleli ; în caz contrar, putem descompune fiecare vector după trei direcții, ajungînd la trei sisteme de cîte n vectori paraleli (componente vectoriale ale vectorilor dați inițial).

3.1.2.1. Vectori paraleli de același sens

Să considerăm, de exemplu, doi vectori legați, paraleli și egali ($\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}$ în sensul vectorilor liberi), aplicați în punctele $A_1(-a, 0)$ și $A_2(a, 0)$, $a > 0$ (fig. 3.4, a).

Acestor doi vectori le corespund cîmpurile vectoriale echivalente

$$\mathbf{Q}_1(x, y) = \mathbf{V}_1\,\delta(x + a, y) = \mathbf{V}\,\delta(x + a, y),$$
$$\mathbf{Q}_2(x, y) = \mathbf{V}_2\delta(x - a, y) = \mathbf{V}\,\delta\,(x - a, y). \qquad (3.1.20)$$

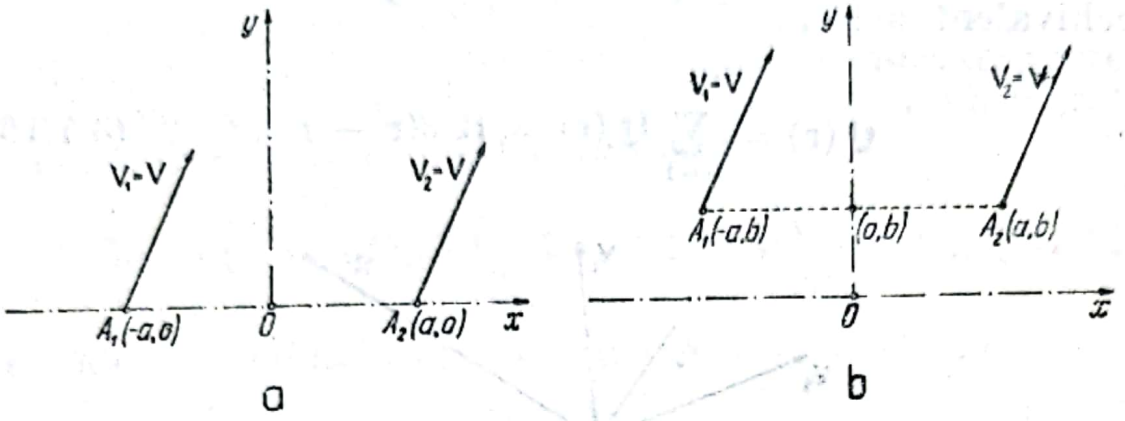


Fig. 3.4.

Cîmpul vectorial $\mathbf{Q}(x, y)$, echivalent cu sistemul format de cei doi vectori legaţi, va fi dat de

$$\mathbf{Q}(x, y) = \mathbf{Q}_1(x, y) + \mathbf{Q}_2(x, y) = \mathbf{V}[\delta(x + a, y) + \delta(x - a, y)];$$

ţinînd seama de formula (1.2.76), obţinem

$$\mathbf{Q}(x, y) = 2a\,\mathbf{V}\,\delta(x^2 - a^2, y),\ a > 0. \qquad (3.1.21)$$

Relaţia (3.1.21) se ia drept regulă de compunere a doi vectori legaţi *echipolenţi* (egali în sensul vectorilor liberi) din planul Oxy, aplicaţi pe axa Ox. Faptul că am considerat un plan Oxy, punctele de aplicaţie fiind pe axa Ox, nu particularizează esenţial acest rezultat. De exemplu, dacă considerăm o dreaptă paralelă cu axa Ox, de ecuaţie $y = b$, obţinem cîmpul vectorial echivalent

$$\mathbf{Q}(x, y) = 2a\,\mathbf{V}\,(x^2 - a^2,\ y - b),$$

corespunzător vectorilor legaţi echipolenţi $\mathbf{V}_1$ şi $\mathbf{V}_2$ (egali cu $\mathbf{V}$ în sensul vectorilor liberi), aplicaţi în punctele $A_1(-a, b)$, $A_2(a, b)$, $a > 0$ (fig. 3.4,*b*).

Observăm că reprezentările de mai sus sînt valabile numai în cazul a doi vectori legaţi; în cazul a doi vectori

Scanned with OKEN Scanner

alunecători, obținem o rezultantă egală cu $2V$, care se aplică în punctul $(0, 0)$, respectiv în punctul $(0, b)$.

Fie un sistem de patru vectori legați echipolenți $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$, $\mathbf{V}_4$ (egali cu $\mathbf{V}$ în sensul vectorilor liberi),

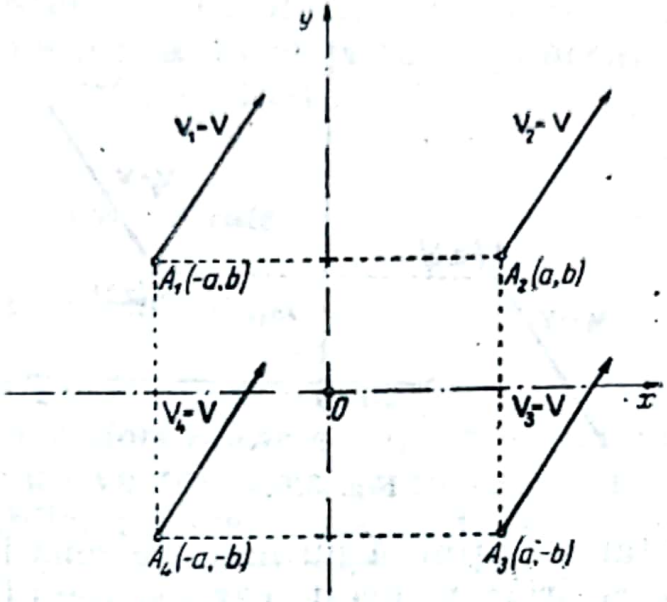


Fig. 3.5.

aplicați în planul Oxy, în punctele $A_1(-a, b)$, $A_2(a, b)$, $A_3(a, -b)$, $A_4(-a, -b)$, $a, b > 0$ (fig. 3.5).

Cîmpul de vectori echivalent va fi dat de

$$\mathbf{Q}(x, y) = \mathbf{V}[\delta(x + a, y - b) + \delta(x - a, y - b) + \\ + \delta(x - a, y + b) + \delta(x + a, y + b)],$$

și, folosind formula (1.2.77), obținem formula de compunere

$$\mathbf{Q}(x, y) = 4ab\,\mathbf{V}\delta(x^2 - a^2, y^2 - b^2), \quad a, b > 0. \quad (3.1.22)$$

3.1.2.2. Vectori paraleli de sens contrar

Să considerăm doi vectori $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, avînd același modul, aceeași direcție și sens contrar, pentru care putem scrie $\mathbf{V}_1 = -\mathbf{V}$, $\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}$ în sensul vectorilor liberi, aplicați în punctele $A_1(-a, b)$ și $A_2(a, b)$, $a > 0$ (fig. 3.6). Cîmpul de vectori echivalent va fi dat de

$$\mathbf{Q}(x, y) = \mathbf{V}[-\delta(x + a, y - b) + \delta(x - a, y - b)];$$

cu ajutorul relației (1.2.79'), putem scrie

$$\mathbf{Q}(x, y) = 2x\,\mathbf{V}\,\delta(x^2 - a^2, y - b),\ a > 0, \qquad (3.1.23)$$

obținînd astfel formula de compunere a doi vectori legați, paraleli, de aceeași mărime și sens contrar.

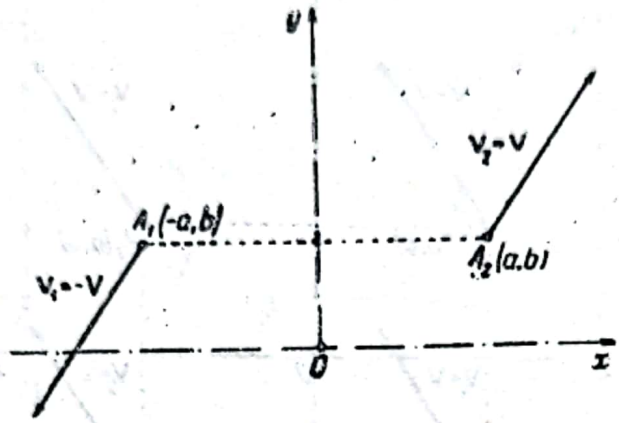


Fig. 3.6.

Reprezentarea obținută nu mai are sens în cazul vectorilor alunecători; în acest caz, sistemul de vectori reprezintă un cuplu, căruia îi corespunde un vector liber.

3.2. Reprezentarea prin distribuții a sarcinilor concentrate

Sarcinile concentrate se pot modela matematic cu ajutorul vectorilor legați. Astfel, ținînd seama de cele expuse

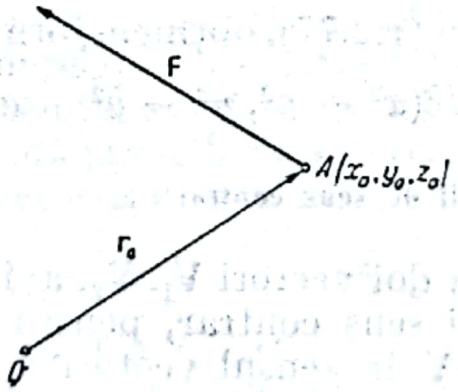


Fig. 3.7.

în 3.1.1, putem reprezenta sarcina echivalentă unei *forțe concentrate* **F** aplicate (fig. 3.7) într-un punct A de vector

de poziţie $\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0)$, sub forma

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0);$$

suportul sarcinii echivalente $\mathbf{Q}(\mathbf{r})$ este punctul A. Cu ajutorul acestei reprezentări, putem determina şi expresia matematică a altor sarcini concentrate (mărimi mecanice cu suport punctual).

3.2.1. *Momente concentrate*

3.2.1.1. Moment concentrat dirijat

În mecanica solidului rigid, forţele concentrate sînt modelate prin *vectori alunecători*, iar un cuplu este reprezentat printr-un vector liber. În mecanica mediilor continue deformabile, forţele concentrate sînt modelate prin *vectori legaţi*, astfel încît un cuplu depinde de punctele de aplicaţie ale forţelor concentrate componente; în această ordine de idei, vom introduce *momentul concentrat dirijat* ca o sarcină concentrată, obţinută plecînd de la un sistem de două forţe concentrate, printr-un proces de trecere la limită.

Fie A un punct fix, definit de vectorul de poziţie $\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0)$, şi B un punct variabil, precizat de vectorul de poziţie $\boldsymbol{\rho}(\xi, \eta, \zeta)$, astfel încît versorul $\mathbf{u} = \text{vers}\,\overrightarrow{AB}$ este constant (fig. 3.8,*a*). În punctele A şi B acţionează forţele paralele şi de sens contrar $-\mathbf{F}$, respectiv $\mathbf{F}$; introducem versorul $\mathbf{F}^0 = \text{vers}\,\mathbf{F}$, pe care-l vom considera constant. Vom nota cu $\mathbf{d} = \overrightarrow{AB}$ braţul de pîrghie al cuplului $(-\mathbf{F}, \mathbf{F})$; mărimea acestui cuplu va fi

$$M = Fd', \tag{3.2.2}$$

unde d' este distanţa dintre cele două suporturi:

$$d' = d\,|\mathbf{u} \times \mathbf{F}^0| = d \sin(\mathbf{u}, \mathbf{F}^0). \tag{3.2.3}$$

Definiţia 3.2.1. Numim *moment concentrat dirijat* în punctul $A(\mathbf{r}_0)$ limita, în sensul teoriei distribuţiilor, a ansamblului de forţe concentrate $(-\mathbf{F}, \mathbf{F})$, cînd braţul

de pîrghie $d \to 0$, considerîndu-se punctul A fix și punctul B mobil, versorii $\mathbf{F}^0$ și $\mathbf{u}$ constanți și mărimea M a momentului constantă.

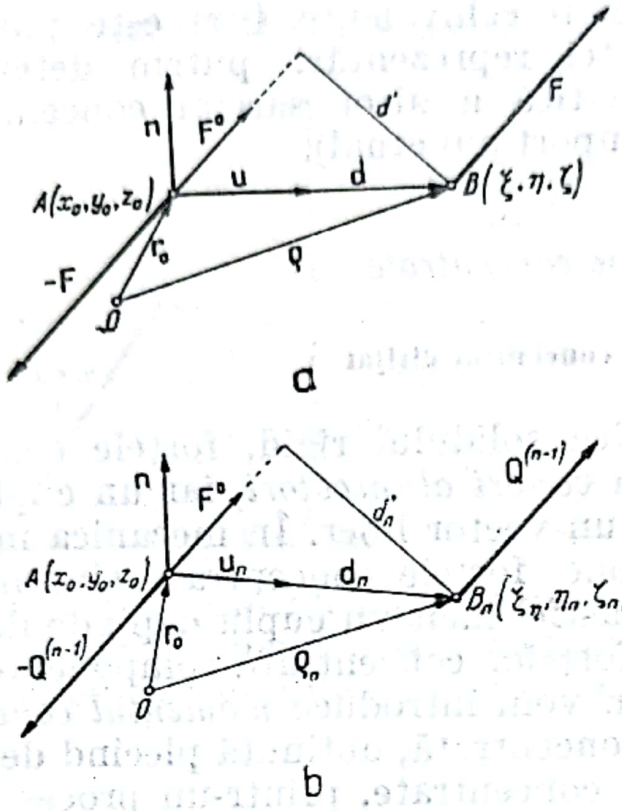


Fig. 3.8.

Pentru a obține expresia momentului concentrat dirijat, observăm că acțiunea celor două forțe este echivalentă cu acțiunea sarcinii

$$\mathbf{Q}_d(\mathbf{r}) = \mathbf{F}\,\delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}) - \mathbf{F}\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\,; \qquad (3.2.4)$$

ținînd seama de (3.2.2), (3.2.3), mai putem scrie

$$\mathbf{Q}_d(\mathbf{r}) = -\frac{M\mathbf{F}^0}{d\,|\mathbf{u} \times \mathbf{F}^0|}[\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - \delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho})]. \qquad (3.2.4')$$

În acest caz, sarcina $\mathbf{Q}(\mathbf{r})$ corespunzătoare momentului concentrat dirijat va fi

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = \lim_{d \to +0} \mathbf{Q}_d(\mathbf{r}) = -\frac{M\mathbf{F}^0}{|\mathbf{u} \times \mathbf{F}^0|}\frac{\partial}{\partial u}\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) =$$

$$= -\frac{M\mathbf{F}^0}{|\mathbf{u} \times \mathbf{F}^0|}\mathbf{u}, \operatorname{grad}\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \qquad (3.2.5)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde am introdus *derivata direcțională* a distribuției lui Dirac după direcția precizată de versorul **u**, prin relația

$$\frac{\partial}{\partial u}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=\mathbf{u}\cdot\operatorname{grad}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=$$

$$=\lim_{d\to+0}\frac{1}{d}[\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)-\delta(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho})]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial u}\delta(x-x_0,y-y_0,z-z_0)= \tag{3.2.6}$$

$$=\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-x_0,y-y_0,z-z_0)+$$

$$+\cos\beta\frac{\partial}{\partial y}\delta(x-x_0,y-y_0,z-z_0)+$$

$$+\cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}\delta(x-x_0,y-y_0,z-z_0),$$

α, β, γ fiind unghiurile făcute de versorul **u** cu axele de coordonate.

Observăm că suportul momentului concentrat dirijat dat de formula (3.2.5) este punctul $A(\mathbf{r}_0)$ și admitem că versorii **u** și $\mathbf{F}^0$ nu sînt coliniari, deci

$$\mathbf{u}\times\mathbf{F}^0\neq 0. \tag{3.2.7}$$

Un caz particular important este cel în care versorii **u** și $\mathbf{F}^0$ sînt normali între ei ($\mathbf{u}\cdot\mathbf{F}^0=0$); sarcina echivalentă corespunzătoare se va scrie

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r})=-M\mathbf{F}^0\frac{\partial}{\partial u}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=-M\mathbf{F}^0[\mathbf{u}\cdot\operatorname{grad}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)]. \tag{3.2.8}$$

Din formula (3.2.5) se constată că un moment concentrat dirijat este caracterizat prin :

a) punctul de aplicație $A(x_0, y_0, z_0)$;

b) versorul $\mathbf{F}^0$ al forțelor ce au generat acest moment ;

c) versorul **u** al direcției după care se efectuează procesul de trecere la limită ;

d) mărimea M a momentului.

Scanned with OKEN Scanner

Sensul momentului rezultă din datele de mai sus, fiind precizat de versorul $\mathbf{n}$ al normalei la planul în care acționează momentul concentrat dirijat; acest vector este ales astfel încît produsul mixt $(\mathbf{u}, \mathbf{F}^0, \mathbf{n}) > 0$. Momentul concentrat dirijat astfel definit este pozitiv, deoarece un observator, situat după versorul $\mathbf{n}$, vede rotația în planul menționat efectuîndu-se în sens pozitiv.

Momentul concentrat dirijat este un *moment de ordinul întîi*; de aceea, mărimea sa și sarcina sa echivalentă vor fi afectate, atunci cînd este necesar, de indicele superior 1 (scriem $M^{(1)}$ și $\mathbf{Q}^{(1)}$).

Plecînd de la un moment concentrat dirijat de ordinul $n-1$, vom considera cuplul $(-\mathbf{Q}^{(n-1)}, \mathbf{Q}^{(n-1)})$, ale cărui componente sînt aplicate în punctul fix $A(\mathbf{r}_0)$, respectiv punctul variabil $B_n(\boldsymbol{\rho}_n)$. Notăm cu $\mathbf{u}_n$ versorul brațului de pîrghie $\mathbf{d}_n = \overrightarrow{AB}_n$, (fig. 3.8, *b*). Mărimea acestui moment va fi

$$M^{(n)} = F\, d_1' \, d_2' \ldots d_n', \tag{3.2.9}$$

unde am pus în evidență brațele de pîrghie corespunzătoare momentelor de ordin mai mic decît n; de asemenea, notăm cu $\mathbf{u}_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, versorii ce definesc direcțiile după care se fac trecerile la limită către punctul fix A.

Definiția 3.2.2. Numim *moment concentrat dirijat de ordinul n* în punctul $A(\mathbf{r}_0)$ limita, în sensul teoriei distribuțiilor, a ansamblului de sarcini echivalente $(-\mathbf{Q}^{(n-1)}, \mathbf{Q}^{(n-1)})$ cînd brațul de pîrghie $d_n \to 0$, considerîndu-se punctul A fix și punctul B_n mobil, versorii $\mathbf{F}^0$ și $\mathbf{u}_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, constanți și mărimea $M^{(n)}$ a momentului constantă.

Deoarece sarcina echivalentă unui moment concentrat dirijat de ordinul întîi a fost precizată anterior, deducem pentru un moment concentrat dirijat de ordinul n sarcina echivalentă

$$\mathbf{Q}^{(n)}(\mathbf{r}) = (-1)^n \frac{M^{(n)}\, \mathbf{F}^0}{\prod_{i=1}^{n} |\mathbf{u}_i \times \mathbf{F}^0|} \frac{\partial^n}{\partial u_1, \partial u_2 \ldots \partial u_n} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \tag{3.2.10}$$

unde am introdus *derivata direcțională mixtă* de ordinul n a distribuției lui Dirac.

În particular, dacă $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}$, expresia sarcinii echivalente momentului concentrat dirijat de ordinul n devine

$$\mathbf{Q}^{(n)}(\mathbf{r}) = (-1)^n \frac{M^{(n)}\,\mathbf{F}^0}{|\mathbf{u} \times \mathbf{F}^0|^n} \frac{\partial^n}{\partial u^n} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0); \quad (3.2.11)$$

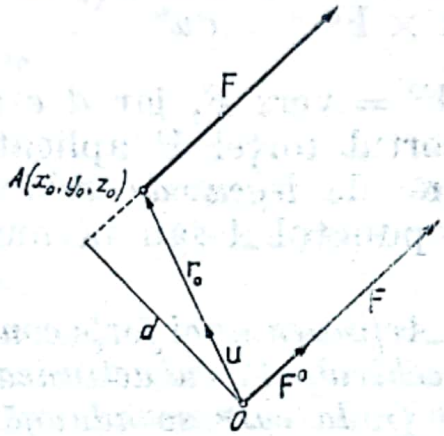


Fig. 3.9

dacă $\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}^0 = 0$, putem scrie

$$\mathbf{Q}^{(n)}(\mathbf{r}) = (-1)^n M^{(n)}\,\mathbf{F}^0 \frac{\partial^n}{\partial u^n} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (3.2.12)$$

Să admitem că în punctul $A(\mathbf{r}_0)$ acționează o forță concentrată $\mathbf{F}$ și să ne propunem să mutăm această forță în originea O a axelor de coordonate, astfel încît efectul ei să rămînă același (fig. 3.9). Sarcinile echivalente corespunzătoare forței concentrate $\mathbf{F}$ aplicate în punctul A, respectiv în punctul O, vor fi

$$\mathbf{Q}_A(\mathbf{r}) = \mathbf{F}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad \mathbf{Q}_O(\mathbf{r}) = \mathbf{F}\,\delta(\mathbf{r}). \quad (3.2.13)$$

Dezvoltînd în serie, după formula lui Taylor, în vecinătatea originii axelor de coordonate, găsim

$$\mathbf{Q}_A(\mathbf{r}) = \mathbf{Q}_O(\mathbf{r}) + \frac{1}{1!}\mathbf{Q}^{(1)}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2!}\mathbf{Q}^{(2)}(\mathbf{r}) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{(n-1)!}\mathbf{Q}^{(n-1)}(\mathbf{r}) + \frac{1}{n!}\bar{\mathbf{Q}}^{(n)}(\mathbf{r}), \quad (3.2.14)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde am introdus momentele concentrate dirijate

$$\mathbf{Q}^{(i)}(\mathbf{r}) = (-1)^i \frac{F\, d^i}{|\mathbf{u} \times \mathbf{F}^0|^i} \mathbf{F}^0 \frac{\partial^i}{\partial u^i} \delta(\mathbf{r}), \ (i = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{3.2.15}$$

$$\bar{\mathbf{Q}}^{(n)}(\mathbf{r}) = (-1)^n \frac{\mathbf{F}\, d^n}{|\mathbf{u} \times \mathbf{F}^0|^n} \mathbf{F}^0 \frac{\partial^n}{\partial u^n} \delta(\mathbf{r} - \theta \mathbf{r}_0), \ 0 < \theta < 1;$$

aici $\mathbf{u} = \text{vers}\, \mathbf{r}_0$, $\mathbf{F}^0 = \text{vers}\, \mathbf{F}$, iar d este distanţa de la punctul O la suportul forţei $\mathbf{F}$ aplicate în punctul A. Expresia (3.2.14) ne dă *legea de echivalenţă a acţiunii forţei* $\mathbf{F}$ aplicate în punctul A sau în punctul O.

Teorema 3.2.1. *Acţiunea unei forţe concentrate* $\mathbf{F}$ *aplicate în punctul* A *este echivalentă cu acţiunea aceleiaşi forţe* $\mathbf{F}$ *aplicate în punctul* O, *la care se adaugă acţiunea a* $n-1$ *momente concentrate dirijate de ordinul întîi, respectiv de ordinul doi, ..., de ordinul* $n-1$, *aplicate în punctul* O, *ale căror sarcini echivalente* $\mathbf{Q}^{(i)}$ *sînt multiplicate cu* $\frac{1}{1!}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *şi acţiunea unui moment concentrat dirijat de ordinul* n, *aplicat într-un punct situat pe segmentul* OA, *a cărui sarcină echivalentă* $\bar{\mathbf{Q}}^{(n)}$ *este multiplicată cu* $\frac{1}{n!}$.

Ţinînd seama de particularităţile fizice ale mediului asupra căruia acţionează forţa $\mathbf{F}$, precum şi de modelul matematic ales pentru acest mediu, se poate determina ordinul maxim al momentelor concentrate dirijate ce pot apărea în problema echivalenţei acţiunii forţelor, deci se poate determina numărul n. Astfel, în cazul unui solid rigid, care se caracterizează prin faptul că distanţa dintre două puncte oarecare ale sale rămîne invariantă în timp, observăm că forţele concentrate se pot reprezenta prin vectori alunecători; aceasta rezultă din legea de echivalenţă a două forţe concentrate egale, aplicate în două puncte diferite ale solidului rigid, pe acelaşi suport. În acest caz, ordinul maxim al momentelor este 1(este suficient să introducem momente de ordinul întîi pentru a

Scanned with OKEN Scanner

putea studia echivalența acțiunii forțelor). Cu alte cuvinte, pentru solide rigide legea de echivalență are forma

$$\mathbf{Q}_A(\mathbf{r}) = \mathbf{Q}_O(\mathbf{r}) + \mathbf{Q}^{(1)}(\mathbf{r}). \qquad (3.2.16)$$

În cazul unui mediu continuu deformabil, pot apărea momente concentrate dirijate de ordin superior.

3.2.1.2. Centru de rotație

Folosind noțiunea de moment concentrat dirijat, putem defini *momentul concentrat rotațional* (*centru de rotație*), care reprezintă o sarcină concentrată cu efecte de *antisimetrie axială*.

Fie dat punctul $A(\mathbf{r}_0)$ și versorul $\mathbf{n}$, normal la un plan P ce trece prin punctul dat. Admitem că în acest punct acționează $n \geqslant 2$ momente concentrate dirijate de mărime M_i, definite cu ajutorul versorilor $\mathbf{u}_i$ și $\mathbf{F}_i^0$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, și aparținînd planului P (fig. 3.10, *a*), ale căror sarcini echivalente sînt

$$\mathbf{Q}_i(\mathbf{r}) = -\frac{M_i \mathbf{F}_i^0}{|\mathbf{u}_i \times \mathbf{F}_i^0|} \frac{\partial}{\partial u_i} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \; (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (3.2.17)$$

Fie $\{\mathbf{Q}\}$ mulțimea sarcinilor echivalente,

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = \mathbf{Q}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{Q}_2(\mathbf{r}) + \ldots + \mathbf{Q}_n(\mathbf{r}). \qquad (3.2.18)$$

Definiția 3.2.3. Numim *moment concentrat rotațional* (sau *centru de rotație*), corespunzător punctului A și planului P, un element al mulțimii $\{\mathbf{Q}\}$, în cazul în care acesta nu depinde de versorii $\mathbf{u}_i$ și $\mathbf{F}_i^0$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Înlocuind (3.2.17) în (3.2.18) și punînd condiția ca elementul $\mathbf{Q}$ să nu depindă de versorii $\mathbf{u}_i$ și $\mathbf{F}_i^0$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, găsim

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = \left(\mathbf{a}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{b}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{c}\frac{\partial}{\partial z}\right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \qquad (3.2.19)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde **a**, **b** și **c** sînt vectori constanți care depind numai de mărimile M_i. Să admitem că acest element s-ar putea reprezenta și sub forma

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = \left(\mathbf{a}'\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{b}'\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{c}'\frac{\partial}{\partial z}\right)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (3.2.19')$$

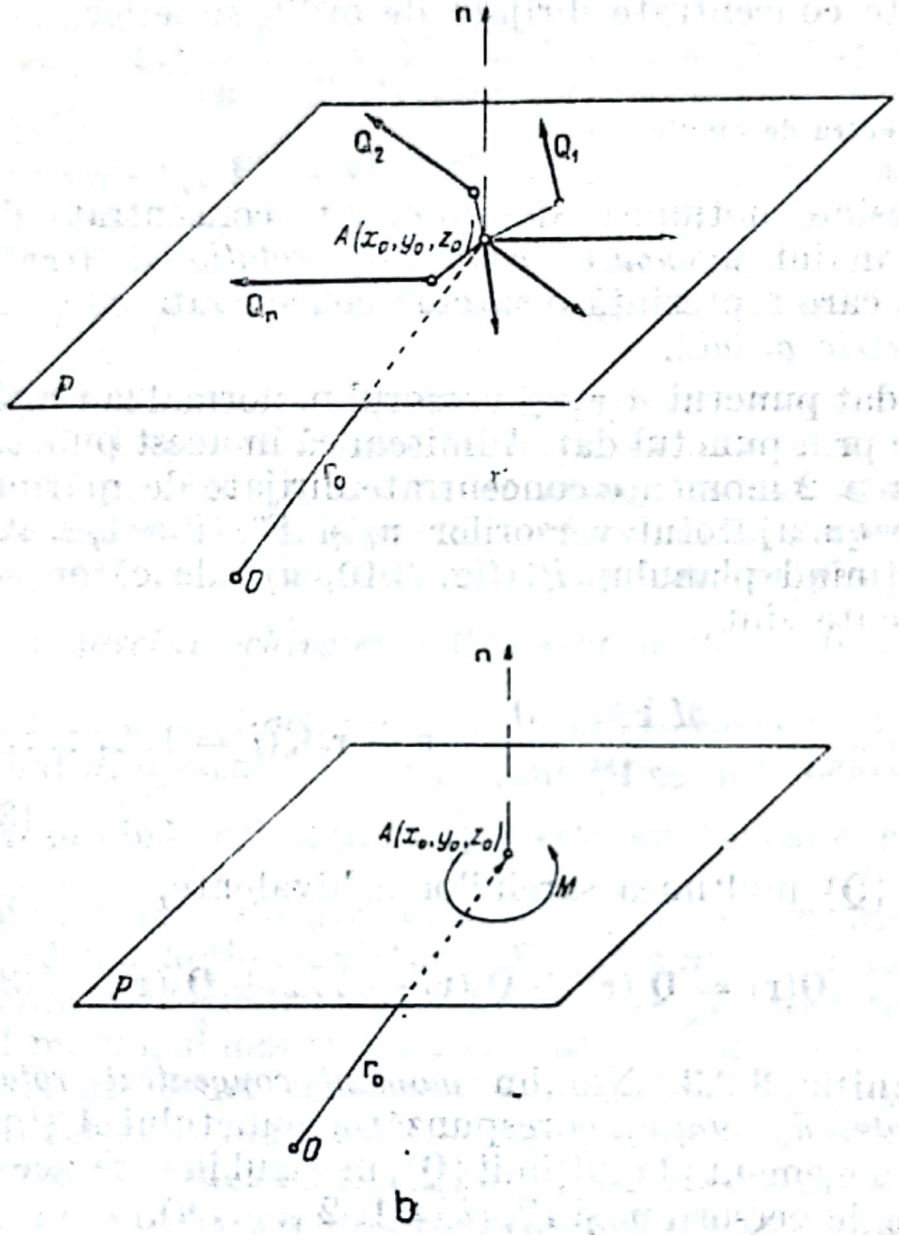


Fig. 3.10.

unde $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$ și $\mathbf{c}'$ sînt de asemenea vectori constanți ; scăzînd reprezentările (3.2.19) și (3.2.19') membru cu membru, rezultă

$$\left[(\mathbf{a} - \mathbf{a}')\frac{\partial}{\partial x} + (\mathbf{b} - \mathbf{b}')\frac{\partial}{\partial y} + (\mathbf{c} - \mathbf{c}')\frac{\partial}{\partial z}\right]\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $\varphi(\mathbf{r}) \in K(R^3)$ este o funcţie fundamentală arbitrară, putem scrie

$$\left(\left[(\mathbf{a}-\mathbf{a}')\frac{\partial}{\partial x}+(\mathbf{b}-\mathbf{b}')\frac{\partial}{\partial y}+(\mathbf{c}-\mathbf{c}')\frac{\partial}{\partial z}\right]\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0),\ \varphi(\mathbf{r})\right)=0;$$

de aici deducem

$$\left[(\mathbf{a}-\mathbf{a}')\frac{\partial}{\partial x}+(\mathbf{b}-\mathbf{b}')\frac{\partial}{\partial y}+(\mathbf{c}-\mathbf{c}')\frac{\partial}{\partial z}\right]\varphi(\mathbf{r}_0)=0,$$

relaţie care nu poate avea loc decît dacă

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}',\quad \mathbf{b}=\mathbf{b}',\quad \mathbf{c}=\mathbf{c}',$$

datorită liniarităţii operatorului diferenţial aplicat funcţiei fundamentale arbitrare $\varphi(\mathbf{r})$. De aici rezultă că reprezentarea (3.2.19) a momentului concentrat rotaţional este *unică*, ceea ce justifică definiţia dată; fie M mărimea acestui moment (fig. 3.10, *b*).

Vom arăta acum că mulţimea $\{\mathbf{Q}\}$ *nu este vidă*; aceasta ne va permite, în baza unicităţii reprezentării (3.2.19), să determinăm efectiv coeficienţii **a**, **b** şi **c** din această relaţie.

Fie astfel două momente concentrate dirijate, aplicate în punctul A şi cuprinse în planul P (fig. 3.11, *a*). Admitem că forţele ce compun aceste momente sînt normale între ele şi că putem scrie

$$M_1=M_2=\frac{M}{2}; \tag{3.2.20}$$

versorii $\mathbf{u}_i$ şi $\mathbf{F}_i^0$, $(i=1,2)$, vor verifica relaţiile (fig. 3.11, *b*)

$$\begin{aligned} &\mathbf{F}_1^0=\mathbf{u}_2, && \mathbf{F}_2^0=-\mathbf{u}_1,\\ &\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2=0, && \mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_2=\mathbf{n}. \end{aligned} \tag{3.2.21}$$

Sarcina echivalentă $\mathbf{Q}(\mathbf{r})$ va fi, în acest caz, dată de

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = -\frac{M}{2}\mathbf{F}_1^0\frac{\partial}{\partial u_1}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) - \frac{M}{2}\mathbf{F}_2^0\frac{\partial}{\partial u_2}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) =$$

$$= -\frac{M}{2}\{\mathbf{u}_2[\mathbf{u}_1\cdot\operatorname{grad}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)] - \mathbf{u}_1[\mathbf{u}_2\cdot\operatorname{grad}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)]\} =$$

$$= -\frac{M}{2}(\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_2)\times\operatorname{grad}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0),$$

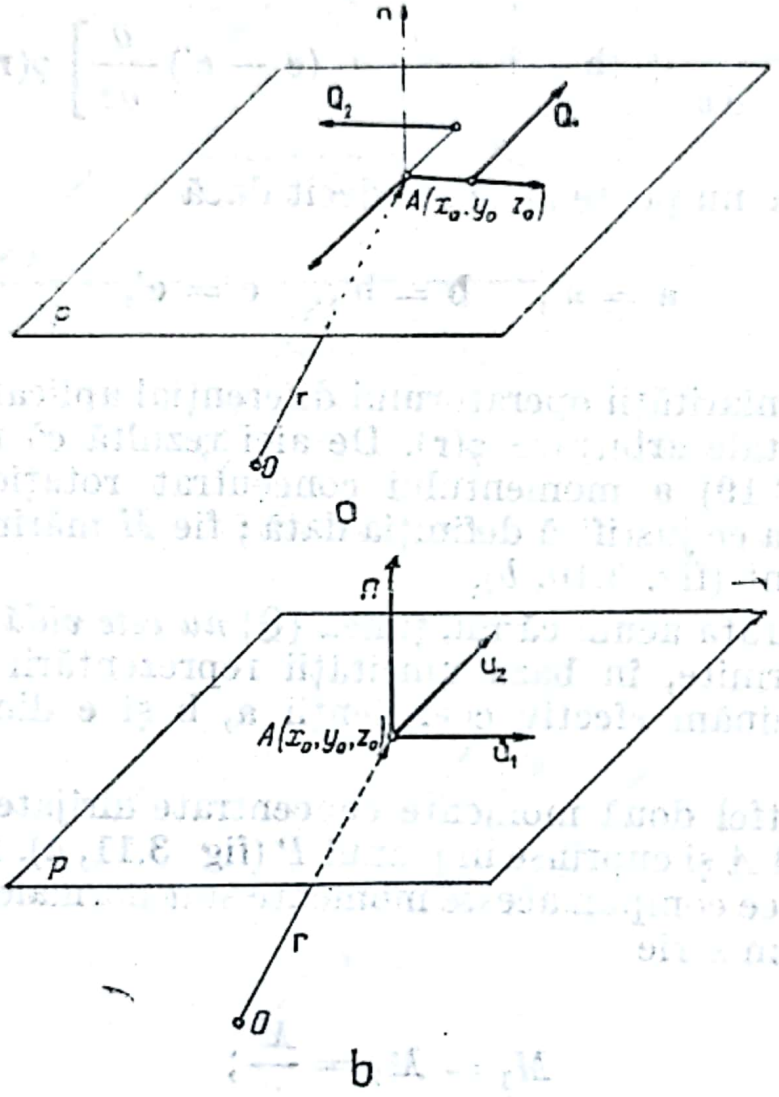


Fig. 3.11.

unde am ţinut seama de formula de dezvoltare a dublului produs vectorial; în felul acesta, sarcina echivalentă centrului de rotaţie se va exprima sub forma

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2}M\,\mathbf{n}\times\operatorname{grad}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0). \qquad (3.2.22)$$

Scanned with OKEN Scanner

Vectorii

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2} M\, \mathbf{i} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{b} = \frac{1}{2} M\, \mathbf{j} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{c} = \frac{1}{2} M\, \mathbf{k} \times \mathbf{n}, \tag{3.2.23}$$

unde $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ și $\mathbf{k}$ sînt versorii axelor de coordonate, vor fi cuprinși în planul P.

Observăm că momentul concentrat rotațional (centrul de rotație) este caracterizat de :

a) punctul de aplicație $A(x_0, y_0, z_0)$;

b) planul orientat P, precizat prin versorul $\mathbf{n}$ al normalei la plan în punctul A ;

c) mărimea M a momentului.

Momentul concentrat rotațional este pozitiv, deoarece un observator, situat după versorul $\mathbf{n}$ (fig. 3.10, *b*), vede rotația în planul P efectuîndu-se în sens pozitiv. În felul acesta, sensul momentului rezultă din datele de mai sus, fiind precizat de versorul $\mathbf{n}$.

Ținînd seama de rezultatele obținute, putem folosi drept *reprezentare canonică a unui centru de rotație* pe cea obținută prin suprapunerea a două momente concentrate dirijate, de același sens, avînd aceeași mărime și pentru care forțele componente sînt ortogonale unele la altele (fig. 3.11, *a*).

În particular, alegînd planul Oxy drept plan P, ($\mathbf{n} = \mathbf{k}$), obținem sarcina echivalentă

$$\mathbf{Q}(x, y) = -\frac{1}{2} M\, \mathbf{k} \times \operatorname{grad} \delta(x - x_0, y - y_0), \tag{3.2.24}$$

de componente

$$Q_x(x, y) = \frac{1}{2} M \frac{\partial}{\partial y} \delta(x - x_0, y - y_0),$$
$$Q_y(x, y) = -\frac{1}{2} M \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - x_0, y - y_0). \tag{3.2.24'}$$

Fie un pătrat $ABCD$ de latură a, avînd laturile paralele cu axele de coordonate (fig. 3.12, *a*) ; admitem că de-a

lungul laturilor pătratului acţionează sarcini tangenţiale uniform repartizate, de intensitate $\frac{M}{2a^2}$. Suma momenelor acestor sarcini în raport cu punctul O este egală cu M; vom arăta că pentru $a \to +0$, în sensul teoriei distribuţiilor, aceste sarcini generează un centru de rotaţie de mărime M, concentrat în origine, sensul de rotaţie fiind cel direct (fig. 3.12, *a*).

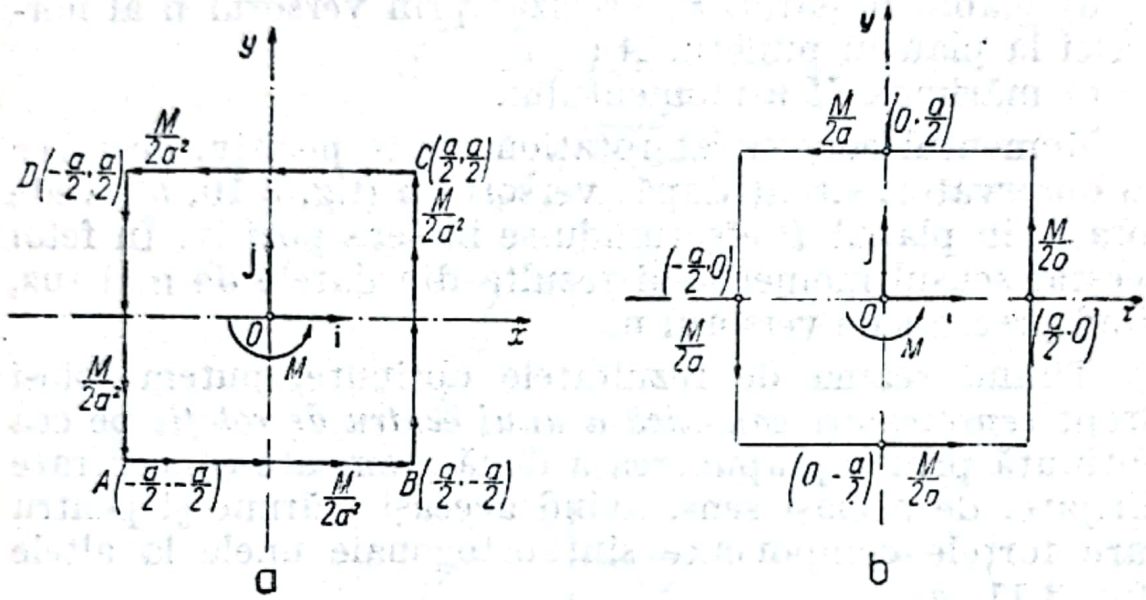


Fig. 3.12.

Sarcinile echivalente corespunzătoare se vor exprima sub forma

$$\frac{M}{2a}\,\mathbf{i}\,\delta(\overline{AB}),\ \frac{M}{2a^2}\,\mathbf{j}\,\delta(\overline{BC}),\ \left[-\frac{M}{2a^2}\,\mathbf{i}\,\delta(\overline{DC}),\right],\ \left[-\frac{M}{2a^2}\,\mathbf{j}\,\delta(\overline{AD})\right],$$

unde s-au pus în evidenţă distribuţiile lui Dirac concentrate pe cele patru laturi ale pătratului. Sarcina echivalentă totală va fi

$$Q_a(x, y) = \frac{M}{2a^2}\,\{\mathbf{i}[\delta(\overline{AB}) - \delta(\overline{DC})] + \mathbf{j}[\delta(\overline{BC}) - \delta(\overline{AD})]\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Introducînd o funcție fundamentală arbitrară $\varphi(x, y) \in$ $\in K(R^2)$, putem scrie

$$\langle Q_a(x,y),\ \varphi(x,y)\rangle = \frac{M}{2a^2}\left\{\mathbf{i}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left[\varphi\left(x,-\frac{a}{2}\right)-\varphi\left(x,\frac{a}{2}\right)\right]dx+\right.$$

$$\left.+\,\mathbf{j}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left[\varphi\left(\frac{a}{2},y\right)-\varphi\left(-\frac{a}{2},y\right)\right]dy\right\}=\frac{M}{2a}\left\{\mathbf{i}\left[\varphi\left(\xi,-\frac{a}{2}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\,\varphi\left(\xi,\frac{a}{2}\right)\right]+\mathbf{j}\left[\varphi\left(\frac{a}{2},\eta\right)-\varphi\left(-\frac{a}{2},\eta\right)\right]\right\},\ -\frac{a}{2}<\xi,\eta<\frac{a}{2},$$

unde am folosit o formulă de medie pentru integrale definite; aplicînd celor două paranteze formula creșterilor finite, obținem

$$(\mathbf{Q}_a(x,y),\ \varphi(x,y)) = \frac{M}{2}\left[-\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial y}\varphi(\xi,\bar{\eta})+\right.$$

$$\left.+\,\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial x}\varphi(\bar{\xi},\eta)\right],\ -\frac{a}{2}<\bar{\xi},\ \bar{\eta}<\frac{a}{2}.$$

Pentru $a \to +0$, în sensul teoriei distribuțiilor, căpătăm

$$\lim_{a\to+0}(\mathbf{Q}_a(x,y),\ \varphi(x,y)) =$$

$$=(\lim_{a\to+0}\mathbf{Q}_a(x,y),\ \varphi(x,y)) = (\mathbf{Q}(x,y),\ \varphi(x,y)) =$$

$$=\frac{M}{2}\left[-\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial y}\varphi(0,0)+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial x}\varphi(0,0)\right]=$$

$$=\left(\frac{M}{2}\left[\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial y}\delta(x,y)-\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial x}\delta(x,y)\right],\ \varphi(x,y)\right),$$

de unde

$$\mathbf{Q}(x,y) = \frac{M}{2}\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial y}-\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial x}\right)\delta(x,y);\qquad (3.2.25)$$

Scanned with OKEN Scanner

regăsim astfel momentul concentrat rotațional de componente (3.2.24′).

Ajungem la același rezultat, dacă înlocuim sarcinile uniform repartizate cu sarcini tangențiale concentrate, de intensitate $\frac{M}{2a}$, aplicate în mijloacele laturilor pătratului (fig. 3.12, *b*); de fapt, dacă facem $a \to +0$, în sensul teoriei distribuțiilor, obținem tocmai cele două momente concentrate dirijate, care ne conduc la momentul concentrat rotațional.

Se poate arăta că, plecînd de la sarcini tangente la laturile unui poligon regulat, uniform distribuite pe aceste laturi, sau de la sarcini tangente la un cerc, uniform distribuite pe circumferință, se obține tot un moment concentrat rotațional. În felul acesta se pune în evidență și un mod de a *construi experimental*, de a *modela* un centru de rotație.

3.2.2. *Dipoli de forțe concentrate*

3.2.2.1. Moment concentrat de tip dipol liniar

Am definit un moment concentrat dirijat, în ipoteza că versorul $\mathbf{F}^0$ al forțelor ce alcătuiesc momentul și versorul $\mathbf{u}$, care indică direcția după care se face trecerea la limită, nu sînt coliniari ($\mathbf{u} \times \mathbf{F}^0 \neq 0$). Pentru cazul de excepție menționat vom introduce un nou tip de moment concentrat : *momentul concentrat de tip dipol*.

Fie punctul fix A, precizat de vectorul de poziție $\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ și punctul variabil B, definit de vectorul de poziție $\boldsymbol{\rho}(\xi, \eta, \zeta)$, astfel încît $\mathbf{u} = \text{vers}\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\text{const.}}$ În punctele A și B acționează forțele concentrate $-\mathbf{F}$, respectiv $\mathbf{F}$, astfel încît $\mathbf{F}^0 = \text{vers}\,\mathbf{F} = \mathbf{u}$; suportul comun al celor două forțe concentrate va constitui linia de acțiune a dipolului, care se consideră pozitiv dacă ne conduce la o depărtare a punctelor de aplicație a acestor forțe (fig. 3.13) și negativ în caz contrar. Notăm cu d distanța dintre punctele A și B; mărimea momentului dipolului va fi

$$D = Fd. \tag{3.2.26}$$

Scanned with OKEN Scanner

Definiția 3.2.4. Numim *moment concentrat de tip dipol liniar* (*dipol de forțe concentrate*) în punctul A, limita, în sensul teoriei distribuțiilor, a ansamblului de forțe concentrate $(-\mathbf{F}, \mathbf{F})$, cînd distanța $d \to +0$, considerîndu-se

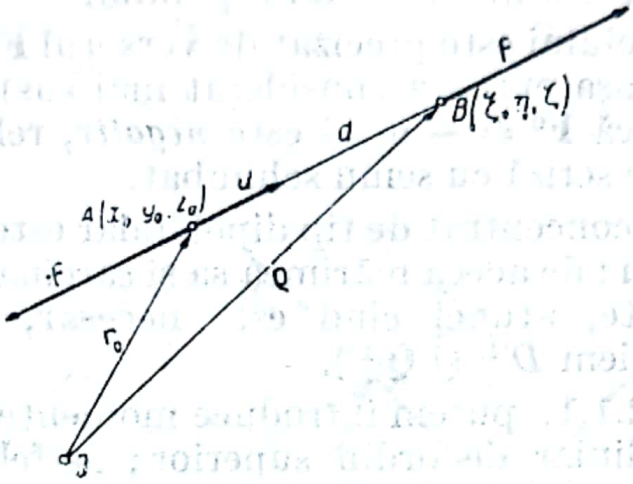


Fig. 3.13.

punctul A fix și punctul B mobil ; se admite că cele două forțe concentrate au același suport, versorul $\mathbf{u}$ fiind constant, și că mărimea D a momentului dipolului este constantă.

Sarcina echivalentă cu ansamblul celor două forțe concentrate se va scrie sub forma

$$\mathbf{Q}_d(\mathbf{r}) = \mathbf{F}\delta(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}) - \mathbf{F}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = -\frac{D\mathbf{u}}{d}\left[\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) - \delta(\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho})\right];$$

trecînd la limita pentru $d \to +0$, în sensul teoriei distribuțiilor, obținem sarcina echivalentă cu momentul concentrat de tip dipol liniar

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = \lim_{d \to +0} \mathbf{Q}_d(\mathbf{r}) = -D\mathbf{u}\frac{\partial}{\partial u}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) =$$

$$= -D[\mathbf{u}\cdot \operatorname{grad}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)]\,\mathbf{u}, \qquad (3.2.27)$$

unde am introdus derivata direcțională după direcția definită de versorul $\mathbf{u}$.

Rezultă că momentul concentrat de tip dipol liniar este caracterizat prin :

a) punctul de aplicație $A(x_0, y_0, z_0)$;
b) versorul **u** al forțelor ce au generat acest moment ;
c) mărimea D a momentului dipolului.

Sensul dipolului este precizat de versorul $\mathbf{F}^0$ al forței **F** ; dacă $\mathbf{F}^0 = \mathbf{u}$ (așa cum s-a considerat mai sus) dipolul este *pozitiv*, iar dacă $\mathbf{F}^0 = -\mathbf{u}$, el este *negativ*, relația (3.2.27) trebuind să fie scrisă cu semn schimbat.

Momentul concentrat de tip dipol liniar este un moment de ordinul întîi ; de aceea mărimea sa și sarcina echivalentă vor fi afectate, atunci cînd este necesar, de indicele superior 1 (scriem $D^{(1)}$ și $\mathbf{Q}^{(1)}$).

Ca și în 3.2.1.1, putem introduce momente concentrate de tip dipol liniar de ordin superior ; astfel, pentru un moment concentrat de tip dipol liniar de ordinul n, putem scrie sarcina echivalentă

$$\mathbf{Q}^{(n)}(\mathbf{r}) = (-1)^n D^{(n)} \mathbf{u} \frac{\partial^n}{\partial u^n} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \qquad (3.2.28)$$

unde mărimea momentului este

$$D^{(n)} = F d_1 d_2 \ldots d_n, \qquad (3.2.29)$$

$d_1, d_2 \ldots, d_n$ fiind distanțele dintre punctele de aplicație ale forțelor ce acționează în punctele mobile pe direcția de versor **u** și punctul de aplicație al forței concentrate ce acționează în punctul fix.

În particular, dacă $d_1 = d_2 = \ldots = d_n = d$, putem scrie

$$D^{(n)} = F d^n. \qquad (3.2.30)$$

3.2.2.2. Centru de dilatație plană

Folosind noțiunea de moment concentrat de tip dipol liniar, putem defini *momentul concentrat de tip dipol planar* (*centru de dilatație plană*), care reprezintă o sarcină concentrată cu efecte de *simetrie axială*.

Scanned with OKEN Scanner

Fie punctul $A(\mathbf{r}_0)$ și versorul $\mathbf{n}$, normal la un plan P ce trece prin punctul dat. Admitem că în acest punct acționează $n \geqslant 2$ dipoli de forțe concentrate, de mărime D_i, definiți cu ajutorul versorilor $\mathbf{u}_i (i = 1, 2, \ldots, n)$, din planul P (fig. 3.14, *a*), ale căror sarcini echivalente sînt

$$\mathbf{Q}_i(\mathbf{r}) = -D_i \mathbf{u}_i \frac{\partial}{\partial u_i} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \quad (3.2.31)$$

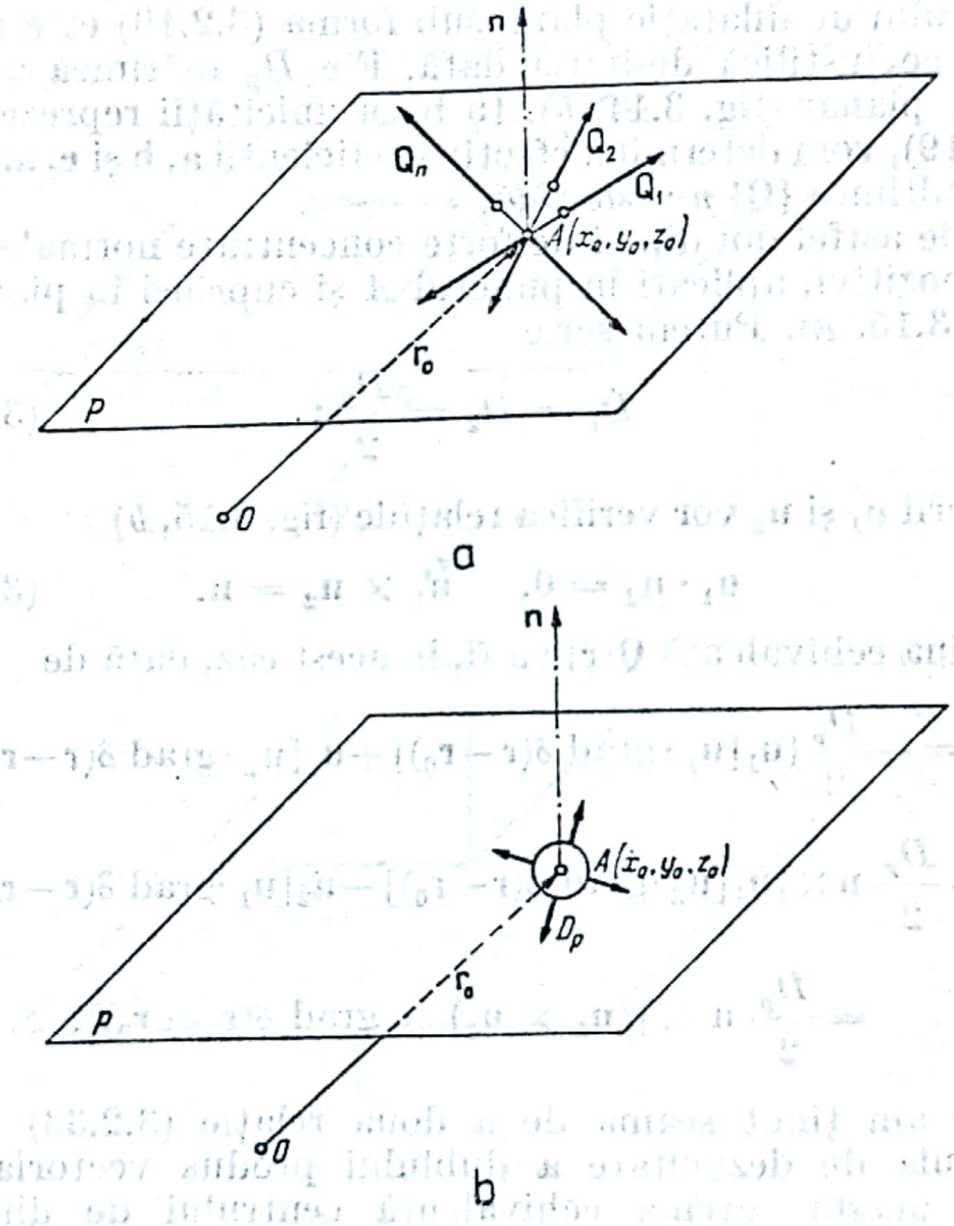


Fig. 3.14.

Prin $\{\mathbf{Q}\}$ notăm mulțimea sarcinilor echivalente, de forma (3.2.18).

Scanned with OKEN Scanner

Definiția 3.2.5. Numim *moment concentrat de tip dipol planar* (sau *centru de dilatație plană*), corespunzător punctului A și planului P, un element al mulțimii $\{\mathbf{Q}\}$, în cazul în care acesta nu depinde de versorii $\mathbf{u}_i, (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Înlocuind (3.2.31) în (3.2.18) și punînd condiția ca elementul $\mathbf{Q}$ să nu depindă de versorii $\mathbf{u}_i, (i = 1, 2, \ldots, n)$, găsim că acesta se exprimă sub forma (3.2.19), unde $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ și $\mathbf{c}$ sînt vectori constanți care depind numai de mărimile D_i; ca și în 3.2.1.2, se poate arăta că reprezentarea centrului de dilatație plană sub forma (3.2.19) este unică, ceea ce justifică definiția dată. Fie D_p mărimea acestui dipol planar (fig. 3.14, *b*). În baza unicității reprezentării (3.2.19), vom determina efectiv coeficienții $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ și $\mathbf{c}$, arătînd că mulțimea $\{\mathbf{Q}\}$ *nu este vidă*.

Fie astfel doi dipoli de forțe concentrate normale între ele, pozitivi, aplicați în punctul A și cuprinși în planul P (fig. 3.15, *a*). Putem scrie

$$D_1 = D_2 = \frac{D_p}{2}; \tag{3.2.32}$$

versorii $\mathbf{u}_1$ și $\mathbf{u}_2$ vor verifica relațiile (fig. 3.15, *b*)

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0, \qquad \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = \mathbf{n}. \tag{3.2.33}$$

Sarcina echivalentă $\mathbf{Q}(\mathbf{r})$ va fi, în acest caz, dată de

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = -\frac{D_p}{2}\{\mathbf{u}_1[\mathbf{u}_1 \cdot \operatorname{grad} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)] + \mathbf{u}_2[\mathbf{u}_2 \cdot \operatorname{grad} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)]\} =$$

$$= -\frac{D_p}{2}\mathbf{n} \times \{\mathbf{u}_1[\mathbf{u}_2 \cdot \operatorname{grad} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)] - \mathbf{u}_2[\mathbf{u}_1 \cdot \operatorname{grad} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)]\} =$$

$$= \frac{D_p}{2}\mathbf{n} \times [(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) \times \operatorname{grad} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)],$$

unde am ținut seama de a doua relație (3.2.33) și de formula de dezvoltare a dublului produs vectorial; în felul acesta sarcina echivalentă centrului de dilatație plană se va exprima astfel:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} D_p \mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \operatorname{grad} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)]. \tag{3.2.34}$$

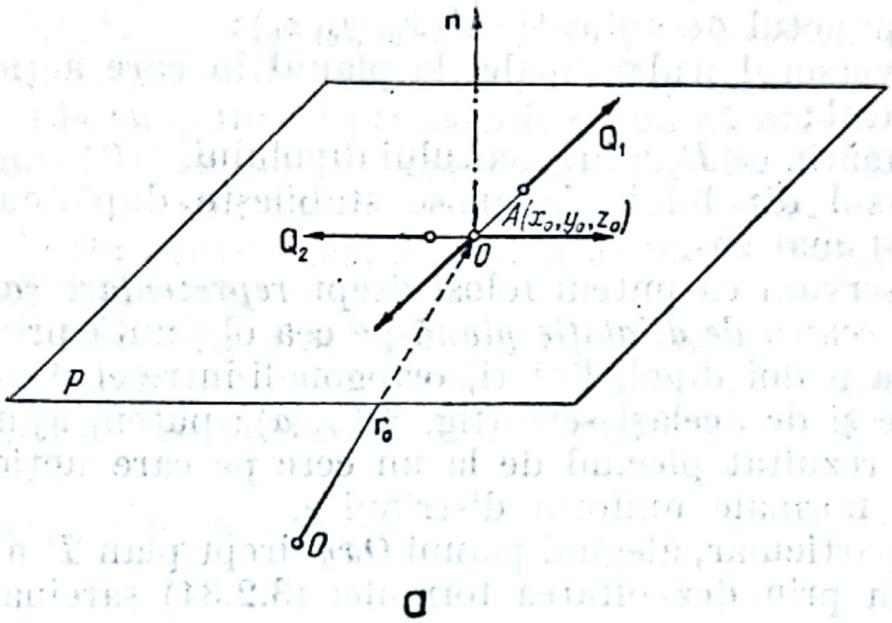
Scanned with OKEN Scanner

Vectorii **a**, **b** și **c** vor fi cuprinși în planul P și vor fi dați de

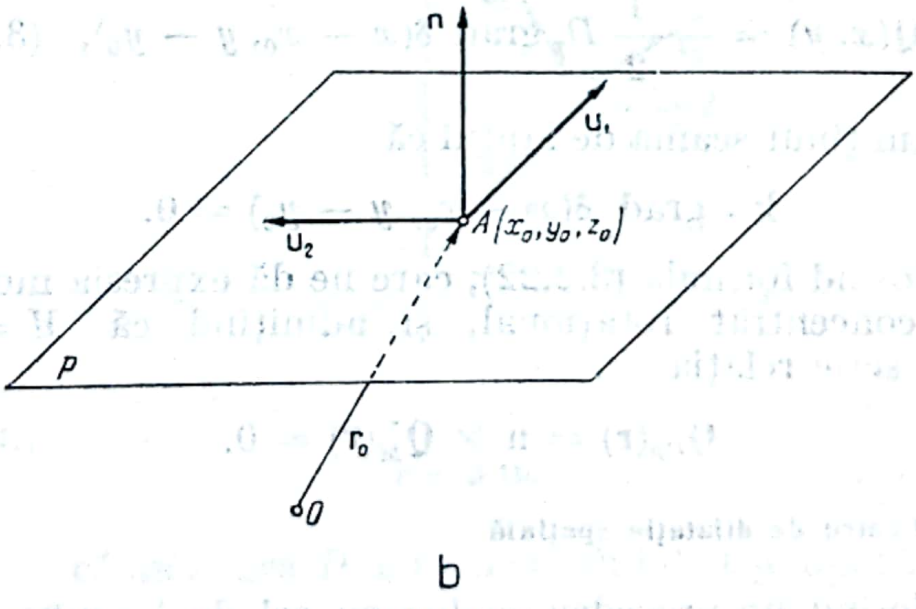
$$\mathbf{a} = \frac{1}{2} D_v \, \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{i}), \quad \mathbf{b} = \frac{1}{2} D_p \, \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{j}),$$

$$\mathbf{c} = \frac{1}{2} D_p \, \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{k}), \tag{3.2.35}$$

unde **i**, **j** și **k** sînt versorii axelor de coordonate.



a



b

Fig. 3.15.

Momentul concentrat de tip dipol planar se va considera *pozitiv* dacă se obține cu ajutorul unor dipoli liniari

Scanned with OKEN Scanner

pozitivi ; în acest caz, el va fi un *centru de dilatație plană*. În caz contrar (dacă se folosesc dipoli liniari negativi) vom avea un moment concentrat de tip dipol planar *negativ* ; acesta va reprezenta un *centru de contracție plană*, iar relațiile (3.2.34) și (3.2.35) vor trebui scrise cu semn schimbat.

Se observă că momentul concentrat de tip dipol planar este caracterizat de :

a) punctul de aplicație $A(x_0, y_0, z_0)$;

b) versorul $\mathbf{n}$ al normalei la planul în care acționează momentul ;

c) mărimea D_p a momentului dipolului.

Sensul dipolului planar se stabilește după cum s-a precizat mai sus.

Observăm că putem folosi drept *reprezentare canonică a unui centru de dilatație plană* pe cea obținută prin compunerea a doi dipoli liniari, ortogonali între ei de aceeași mărime și de același sens (fig. 3.15, *a*) ; putem ajunge la același rezultat plecînd de la un cerc pe care acționează sarcini normale uniform distribuite.

În particular, alegînd planul Oxy drept plan $P(\mathbf{n} = \mathbf{k})$, obținem prin dezvoltarea formulei (3.2.34) sarcina echivalentă

$$\mathbf{Q}(x, y) = -\frac{1}{2} D_p \operatorname{grad} \delta(x - x_0, y - y_0), \quad (3.2.36)$$

unde am ținut seama de faptul că

$$\mathbf{k} \cdot \operatorname{grad} \delta(x - x_0, y - y_0) = 0.$$

Folosind formula (3.2.22), care ne dă expresia momentului concentrat rotațional, și admițînd că $M = D_p$, putem scrie relația

$$\mathbf{Q}_{D_p}(\mathbf{r}) = \mathbf{n} \times \mathbf{Q}_M^{\cdot}(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.2.37)$$

3.2.2.3. Centru de dilatație spațială

Folosind un procedeu analog cu cel de la subpunctul precedent, putem introduce *momentul concentrat de tip dipol spațial* (*centru de dilatație spațială*), care reprezintă o sarcină concentrată cu efecte de *simetrie centrală*.

Scanned with OKEN Scanner

Fie dat punctul $A(\mathbf{r}_0)$ în care acţionează $n \geqslant 3$ dipoli de forţe concentrate, de mărime D_i, definiţi cu ajutorul versorilor $\mathbf{u}_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, ale căror sarcini echivalente se exprimă sub forma (3.2.31). Prin $\{\mathbf{Q}\}$ notăm mulţimea sarcinilor echivalente, de forma (3.2.18).

Definiţia 3.2.6. Numim *moment concentrat de tip dipol spaţial* (sau *centru de dilataţie spaţială*), corespunzător punctului A, un element al mulţimii $\{\mathbf{Q}\}$, în cazul în care acesta nu depinde de versorii $\mathbf{u}_i$,$(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Ca şi la subpunctul precedent, găsim că un element al mulţimii $\{\mathbf{Q}\}$ se poate reprezenta sub forma (3.2.19), unde $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ şi $\mathbf{c}$ sînt vectori constanţi ce depind numai de mărimile D_i; această reprezentare este unică, ceea ce justifică definiţia dată.

Fie acum trei dipoli de forţe concentrate de forma (3.2.31), liniile lor de acţiune fiind precizate de versorii $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ şi $\mathbf{u}_3$, ortogonali între ei şi formînd un triedru drept (fig. 3.16) :

$$\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0, \quad (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) > 0; \quad (3.2.38)$$

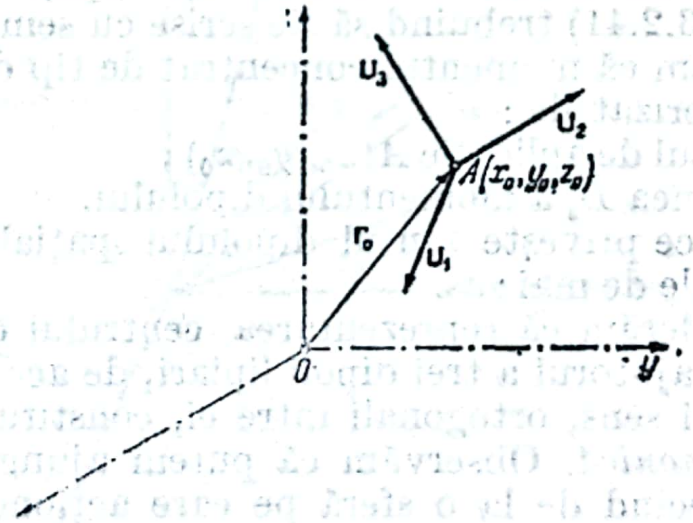


Fig. 3.16.

admitem că mărimea D_s a momentului de tip dipol spaţial este dată de

$$D_1 = D_2 = D_3 = \frac{D_s}{3}. \quad (3.2.39)$$

Sarcina echivalentă va fi, în acest caz,

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = -\frac{D_s}{3}\left[\mathbf{u}_1 \frac{\partial}{\partial u_1}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) + \mathbf{u}_2 \frac{\partial}{\partial u_2}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) + \right.$$

$$\left. + \mathbf{u}_3 \frac{\partial}{\partial u_3}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\right] = -\frac{D_s}{3}\{\mathbf{u}_1[\mathbf{u}_1 \cdot \operatorname{grad}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)] +$$

$$+ \mathbf{u}_2[\mathbf{u}_2 \cdot \operatorname{grad}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)] + \mathbf{u}_3[\mathbf{u}_3 \cdot \operatorname{grad}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)]\};$$

în felul acesta sarcina echivalentă centrului de dilatație spațială se va exprima sub forma

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{3} D_s \operatorname{grad}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0), \qquad (3.2.40)$$

iar vectorii **a**, **b** și **c** vor fi

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{3} D_s \mathbf{i}, \quad \mathbf{b} = -\frac{1}{3} D_s \mathbf{j}, \quad \mathbf{c} = -\frac{1}{3} D_s \mathbf{k}. \qquad (3.2.41)$$

Momentul concentrat de tip dipol spațial se va considera *pozitiv* dacă se obține cu ajutorul unor dipoli liniari pozitivi; în acest caz el va fi un *centru de dilatație spațială*. Dacă dipolii liniari componenți sînt negativi, căpătăm un moment concentrat de tip dipol spațial *negativ*; acesta va reprezenta un *centru de concentrație spațială*, relațiile (3.2.40) și (3.2.41) trebuind să fie scrise cu semn schimbat.

Observăm că momentul concentrat de tip dipol spațial este caracterizat de:

a) punctul de aplicație $A(x_0, y_0, z_0)$;

b) mărimea D_s a momentului dipolului.

În ceea ce privește sensul dipolului spațial, se folosesc considerațiile de mai sus.

Considerăm că reprezentarea centrului de dilatație spațială cu ajutorul a trei dipoli liniari, de aceeași mărime și de același sens, ortogonali între ei, constituie *reprezentarea* sa *canonică*. Observăm că putem ajunge la același rezultat plecînd de la o sferă pe care acționează sarcini normale uniform distribuite.

Este interesant de observat că momentul concentrat de tip dipol spațial introduce un alt tip de singularitate decît forța concentrată, de exemplu. Într-adevăr, forța concentrată poate fi obținută cu ajutorul unor șiruri reprezentative δ, pe cînd centrul de dilatație spațială se aproximează cu șiruri reprezentative δ'.

Scanned with OKEN Scanner

3.3. Reprezentarea prin distribuții a momentelor unui sistem de puncte materiale

În dinamica sistemelor discrete și continue de puncte materiale (în particular, în dinamica solidului rigid) legile de mișcare se exprimă cu ajutorul unor mărimi de natură geometrică și mecanică numite momente. Aceasta a permis dezvoltarea unei geometrii a maselor, unde joacă un rol esențial momentele statice și momentele de inerție. Aceste mărimi caracterizează repartiția în spațiu a maselor unui sistem de puncte materiale.

3.3.1. *Sisteme discrete de puncte materiale*

Fie $A_i(x_i, y_i, z_i)$ un sistem discret (S) de n puncte materiale de mase m_i, precizat prin vectorii de poziție $\mathbf{r}_i$,

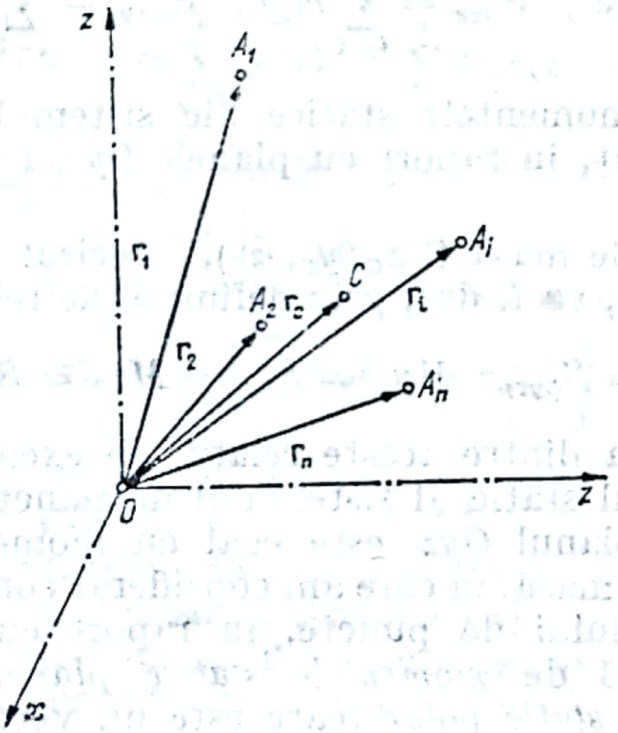


Fig. 3.17.

$(i = 1, 2, \ldots, n)$ (fig. 3.17). Expresia

$$I_p = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^{\alpha} y_i^{\beta} z_i^{\gamma}, \qquad (3.3.1)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\alpha, \beta, \gamma \in N$, poartă numele de *moment* de ordin $p = \alpha + \beta + \gamma$ *al sistemului de puncte.*

Pentru $\alpha = \beta = \gamma = 0$ obținem momentul de ordinul zero ($p = 0$)

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i, \tag{3.3.2}$$

care reprezintă *masa totală* a sistemului de puncte materiale.

Pentru $p = 1$ obținem momente de ordinul întîi (*momente statice*), iar pentru $p = 2$ obținem momente de ordinul doi (*momente de inerție*).

3.3.1.1. Momente statice

Expresiile

$$S_{Oyz} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \quad S_{Ozx} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \quad S_{Oxy} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i \tag{3.3.3}$$

reprezintă momentele statice ale sistemului de puncte materiale dat, în raport cu planele *Oyz*, respectiv *Ozx* și *Oxy*.

Centrul de masă $C(x_C, y_C, z_C)$, precizat prin vectorul de poziție $\mathbf{r}_C$, va fi dat, prin definiție, de relațiile

$$Mx_C = S_{Oyz}, \quad My_C = S_{Ozx}, \quad Mz_C = S_{Oxy}; \tag{3.3.4}$$

astfel, prima dintre aceste relații, de exemplu, ne arată că momentul static al sistemului de puncte materiale în raport cu planul *Oyz* este egal cu momentul static al centrului de masă, în care am considerat concentrată toată masa sistemului de puncte, în raport cu același plan.

În afară de *momentele statice planare* vom defini și *momentul static polar* (care este un vector) sub forma

$$\mathbf{S}_O = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i; \tag{3.3.5}$$

în acest caz, poziția centrului de masă va fi dată de

$$M\mathbf{r}_C = \mathbf{S}_O \tag{3.3.6}$$

Scanned with OKEN Scanner

şi putem afirma că momentul static polar al unui sistem de puncte materiale în raport cu polul O este egal cu momentul static al centrului de masă, în care am considerat concentrată toată masa sistemului de puncte, în raport cu acelaşi pol.

Să ne oprim acum atenţia asupra punctului material A_i; din punct de vedere al teoriei distribuţiilor, el va fi caracterizat prin densitatea volumică

$$\rho_i(\mathbf{r}) = m_i\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = m_i\delta(x - x_i,\ y - y_i,\ z - z_i). \quad (3.3.7)$$

Pentru a obţine masa punctului material, va trebui să aplicăm această distribuţie asupra funcţiei $\varphi(\mathbf{r}) = 1$; obţinem astfel

$$(\rho_i(\mathbf{r}), 1) = (m_i\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), 1) = (\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), m_i) = m_i|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i} = m_i. \quad (3.3.8)$$

Sistemul (S) de puncte materiale va fi caracterizat de densitatea volumică

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{n} m_i\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = \sum_{i=1}^{n} m_i\delta(x - x_i,\ y - y_i,\ z - z_i); \quad (3.3.9)$$

masa totală a sistemului de puncte se obţine aplicînd această densitate funcţiei $\varphi(\mathbf{r}) = 1$, astfel încît

$$M = (\rho(\mathbf{r}),\ 1) = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), 1\right) = \sum_{i=1}^{n} (m_i\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), 1) = \sum_{i=1}^{n} m_i. \quad (3.3.10)$$

Cu ajutorul rezultatelor de mai sus, putem calcula momentele de orice ordin ale sistemului (S) de puncte materiale dat. Astfel, momentul static al sistemului (S) în raport cu planul Oyz se va calcula sub forma

$$S_{Oyz} = (\rho(\mathbf{r}), x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \rho_i(\mathbf{r}), x\right) = \sum_{i=1}^{n} (\rho_i(\mathbf{r}), x) = \sum_{i=1}^{n} (m_i\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), x) = \sum_{i=1}^{n} (\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), m_i x) = \sum_{i=1}^{n} m_i x|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i; \quad (3.3.11)$$

în mod analog, pentru momentele statice în raport cu planele Ozx, respectiv Oxy, putem scrie

$$S_{Ozx} = (\rho(\mathbf{r}), y) = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), y \right) = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \tag{3.3.11'}$$

$$S_{Oxy} = (\rho(\mathbf{r}), z) = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), z \right) = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i.$$

Observăm, ca și la subpunctul 1.4.1.1, că deși funcțiile 1, x, y și z nu sînt funcții fundamentale (deoarece nu au suport compact), expresiile (3.3.8), (3.3.10)—(3.3.11') au sens, deoarece densitățile $\rho_i(\mathbf{r})$ și $\rho(\mathbf{r})$ sînt distribuții cu suport compact [constituit din punctul A_i sau din totalitatea punctelor A_i, $(i = 1,2, \ldots, n)$].

Pentru momentul static polar în raport cu punctul O, putem scrie

$$\mathbf{S}_O = (\rho(\mathbf{r}), \mathbf{r}) = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \mathbf{r} \right) = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i ; \tag{3.3.12}$$

momentele statice planare sînt componentele momentului static polar după cele trei axe de coordonate.

Vectorul de poziție $\mathbf{r}_C$ al centrului de masă al sistemului de puncte materiale va fi

$$\mathbf{r}_C = \left(\rho(\mathbf{r}), \frac{\mathbf{r}}{M} \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \frac{\mathbf{r}}{M} \right) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i, \tag{3.3.13}$$

unde M este masa totală a sistemului de puncte materiale.

De asemenea, observăm că distribuția

$$\vec{\mathscr{P}}_O = \mathbf{r}\, \rho(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \sum_{i=1}^{n} m_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \tag{3.3.14}$$

Scanned with OKEN Scanner

caracterizează în întregime momentul static al sistemului de puncte materiale în raport cu polul O; într-adevăr, aplicînd această distribuție funcției $\varphi(\mathbf{r}) = 1$, obținem

$$S_O = (\vec{\mathscr{S}}_O, 1) = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), 1 \right) = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i.$$

Putem deci spune că $\vec{\mathscr{S}}_O$ reprezintă *distribuția momentului static polar* al sistemului de puncte materiale, în raport cu polul O.

În mod analog, se introduc *distribuțiile momentelor statice planare*

$$\mathscr{S}_{Oyz} = x\rho(\mathbf{r}), \quad \mathscr{S}_{Ozx} = y\rho(\mathbf{r}), \quad \mathscr{S}_{Oxy} = z\rho(\mathbf{r}); \qquad (3.3.15)$$

de exemplu, distribuția $\mathscr{S}_{Oyz}$ ne conduce la

$$S_{Oyz} = (\mathscr{S}_{Oyz}, 1) = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), 1 \right) = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i.$$

În felul acesta, atît distribuția (3.3.14), cît și distribuțiile (3.3.15) ne permit să obținem poziția centrului de masă; de exemplu, folosind distribuția $\frac{1}{M}\vec{\mathscr{S}}_O$, putem scrie

$$\mathbf{r}_C = \left(\frac{1}{M} \vec{\mathscr{S}}_O, 1 \right) = \left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), 1 \right) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i.$$

3.3.1.2. Momente de inerție

Expresia

$$I_O = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \qquad (3.3.16)$$

reprezintă *momentul de inerție polar* al sistemului (S) de puncte materiale în raport cu originea O. În mod analog, expresiile

$$I_{Oyz} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2, \quad I_{Ozx} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2, \quad I_{Oxy} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i^2 \qquad (3.3.17)$$

reprezintă *momente de inerție planare*, în raport cu planele

Scanned with OKEN Scanner

Oyz, respectiv *Ozx* și *Oxy*; suma acestor momente de inerție este egală cu momentul de inerție polar

$$I_O = I_{Oyz} + I_{Ozx} + I_{Oxy}. \tag{3.3.18}$$

Momentele de inerție axiale ale sistemului (S) de puncte materiale în raport cu axele Ox, Oy și Oz sînt

$$I_x = \sum_{i=1}^{n} m_i(y_i^2 + z_i^2), \quad I_y = \sum_{i=1}^{n} m_i(z_i^2 + x_i^2), \tag{3.3.19}$$
$$I_z = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + y_i^2);$$

de asemenea, introducem *momentele de inerție centrifugale*

$$I_{yz} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i, \quad I_{zx} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i x_i, \quad I_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i. \tag{3.3.20}$$

Ca și momentele de inerție polare și planare, momentele de inerție axiale și centrifugale sînt momente de ordinul doi; acestea sînt componentele unui tensor de ordinul al doilea (momentele de inerție centrifugale se iau cu semn schimbat).

Într-o exprimare în distribuție, obținem momentul de inerție polar

$$I_O = (\rho(\mathbf{r}), \mathbf{r}^2) = (\rho(\mathbf{r}), x^2 + y^2 + z^2) =$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \mathbf{r}^2\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i^2. \tag{3.3.21}$$

Pentru momentul de inerție planar I_{Oyz} putem scrie

$$I_{Oyz} = (\rho(\mathbf{r}), x^2) = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), x^2\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2; \tag{3.3.22}$$

în mod analog, obținem

$$I_{Ozx} = (\rho(\mathbf{r}), y^2) = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2,$$

$$I_{Oxy} = (\rho(\mathbf{r}), z^2) = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i^2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Momentele de inerţie axiale vor fi

$$I_x = (\rho(\mathbf{r}), y^2 + z^2) = \sum_{i=1}^{n} m_i(y_i^2 + z_i^2),$$

$$I_y = (\rho(\mathbf{r}), z^2 + x^2) = \sum_{i=1}^{n} m_i(z_i^2 + x_i^2), \qquad (3.3.23)$$

$$I_z = (\rho(\mathbf{r}), x^2 + y^2) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + y_i^2),$$

iar momentele de inerţie centrifugale

$$I_{yz} = (\rho(\mathbf{r}), yz) = \sum_{i=1}^{n} m_i\, y_i\, z_i,$$

$$I_{zx} = (\rho(\mathbf{r}), zx) = \sum_{i=1}^{n} m_i\, z_i\, x_i, \qquad (3.3.24)$$

$$I_{xy} = (\rho(\mathbf{r}), xy) = \sum_{i=1}^{n} m_i\, x_i\, y_i\,.$$

Ca şi în cazul momentelor statice, putem introduce anumite distribuţii, care caracterizează în întregime un anumit moment de inerţie. Astfel

$$\mathcal{J}_O = \mathbf{r}^2 \rho\,(\mathbf{r}) \qquad (3.3.25)$$

reprezintă *distribuţia* corespunzătoare *momentului de inerţie polar*, în raport cu polul O ; într-adevăr, putem scrie

$$I_O = (\mathcal{J}_O, 1) = (\mathbf{r}^2 \rho(\mathbf{r}), 1) = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\, \mathbf{r}_i^2\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), 1 \right) = \sum_{i=1}^{n} m_i\, \mathbf{r}_i^2.$$

În mod analog, *distribuţiile momentelor de inerţie planare* vor fi

$$\mathcal{J}_{Oyz} = x^2 \rho(\mathbf{r}),\ \mathcal{J}_{Ozx} = y^2 \rho(\mathbf{r}),\ \mathcal{J}_{Oxy} = z^2 \rho(\mathbf{r}), \qquad (3.3.26)$$

distribuţiile momentelor de inerţie axiale se vor exprima sub forma

$$\mathcal{J}_x = (y^2 + z^2)\rho(\mathbf{r}),\ \mathcal{J}_y = (z^2 + x^2)\rho(\mathbf{r}),\ \mathcal{J}_z = (x^2 + y^2)\rho(\mathbf{r}), \qquad (3.3.27)$$

Scanned with OKEN Scanner

iar *distribuțiile momentelor de inerție centrifugale* se pot scrie

$$\mathcal{J}_{yz} = yz\rho(\mathbf{r}), \quad \mathcal{J}_{zx} = zx\rho(\mathbf{r}), \quad \mathcal{J}_{xy} = xy\rho(\mathbf{r}). \quad (3.3.28)$$

Ținînd seama de natura tensorială a momentelor de inerție, putem scrie componentele tensoriale ale distribuției corespunzătoare unui moment de inerție, într-un sistem ortonormal $Ox_1x_2x_3$, sub forma

$$\mathcal{J}_{jk} = (x_l\, x_l\delta_{jk} - x_j\, x_k)\rho(\mathbf{r}), \quad (3.3.29)$$

unde δ_{jk} este simbolul lui Kronecker :

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 \text{ pentru } j = k, \\ 0 \text{ pentru } j \neq k, \end{cases} \quad (3.3.30)$$

și am folosit convenția de sumare a lui Einstein (sumare în raport cu indici muți — doi indici egali în expresia unui monom). Pentru tensorul momentelor de inerție rezultă

$$I_{jk} = (\mathcal{J}_{jk},\ 1). \quad (3.3.31)$$

3.3.2. *Sisteme continue de puncte materiale*

Momentele unui sistem continuu de puncte materiale (în particular, ale unui solid rigid) se exprimă cu ajutorul integralelor curbilinii, de suprafață sau de volum. În general, integralele utilizate pentru a exprima momentele unui sistem continuu de puncte materiale sînt *integrale Stieltjes* ; dacă densitatea de repartiție a masei se exprimă cu ajutorul unor funcții continue, aceste integrale devin *integrale Riemann*.

În cazul unui continuum, putem folosi metode de calcul similare cu cele prezentate la punctul precedent. În locul distribuției lui Dirac concentrate într-un punct sau într-un număr finit de puncte, care exprimă densitatea volumică a sistemului discret de puncte materiale, vom utiliza distribuția lui Dirac $\delta(C)$ concentrată pe o curbă, distribuția lui Dirac $\delta(S)$ concentrată pe o suprafață sau distribuția lui Dirac $\delta(V)$ concentrată pe un volum.

Scanned with OKEN Scanner

Fie $\sigma(r) = \sigma(x, y, z)$ densitatea liniară a masei distribuite de-a lungul unei curbe C (fig. 3.18); admitem că $\sigma(\mathbf{r})$ este o funcţie integrabilă. Dacă notăm cu $\delta(C)$ *distribuţia lui Dirac concentrată pe curba* C şi definită de o relaţie de forma (1.4.4),

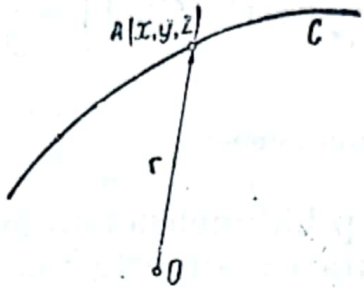


Fig. 3.18.

putem scrie *densitatea volumică a continuumului unidimensional* sub forma

$$\rho(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r})\ \delta(C) = \sigma(x, y, z)\ \delta(C). \tag{3.3.32}$$

Masa totală va fi

$$M = (\rho(\mathbf{r}), 1) = (\sigma(\mathbf{r})\delta(C), 1) = \int_C \sigma(\mathbf{r})\, ds\,; \tag{3.3.33}$$

observăm astfel că densitatea volumică $\delta(\mathbf{r})$ joacă acelaşi rol ca în cazul unui sistem discret de puncte materiale. Prin urmare, *momentul static polar* va fi dat de

$$\mathbf{S}_O = (\rho(\mathbf{r}), \mathbf{r}) = (\sigma(\mathbf{r})\delta(C), \mathbf{r}) = \int_C \mathbf{r}\,\sigma(\mathbf{r})\, ds, \tag{3.3.34}$$

iar *momentul de inerţie polar* se va scrie

$$I_O = (\rho(\mathbf{r}), \mathbf{r}^2) = (\sigma(\mathbf{r})\delta(C), \mathbf{r}^2) = \int_C \mathbf{r}^2\,\sigma(\mathbf{r})\, ds\,. \tag{3.3.35}$$

În mod analog, *distribuţia* corespunzătoare *momentului static polar* va fi

$$\vec{\mathscr{S}}_O = \mathbf{r}\,\rho(\mathbf{r}) = \mathbf{r}\,\sigma(\mathbf{r})\ \delta\,(C), \tag{3.3.36}$$

Scanned with OKEN Scanner

iar *distribuția* corespunzătoare *momentului de inerție polar* se va scrie

$$\mathcal{J}_o = \mathbf{r}^2\rho(\mathbf{r}) = \mathbf{r}^2\sigma(\mathbf{r})\,\delta(C)\,; \tag{3.3.37}$$

în acest caz, centrul de masă va fi dat de

$$\mathbf{r}_C = \left(\frac{1}{M}\vec{\mathcal{G}}_o, 1\right) = \left(\frac{1}{M}\mathbf{r}\,\sigma(\mathbf{r})\delta(C), 1\right) = \frac{1}{M}\int_C \mathbf{r}\,\sigma(\mathbf{r})\mathrm{d}s. \tag{3.3.38}$$

3.3.2.2. Caz bi- sau tridimensional

În cazul unui corp bidimensional, admitem că masa este distribuită cu densitatea superficială $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma(x, y, z)$ pe suprafața S (fig. 3.19, *a*). Introducînd distribuția lui Dirac $\delta(S)$ concentrată pe suprafața S, cu ajutorul formulei (1.4.5), putem scrie *densitatea volumică a continuumului bidimensional* sub forma

$$\rho(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r})\delta(S) = \sigma(x, y, z)\,\delta(S). \tag{3.3.39}$$

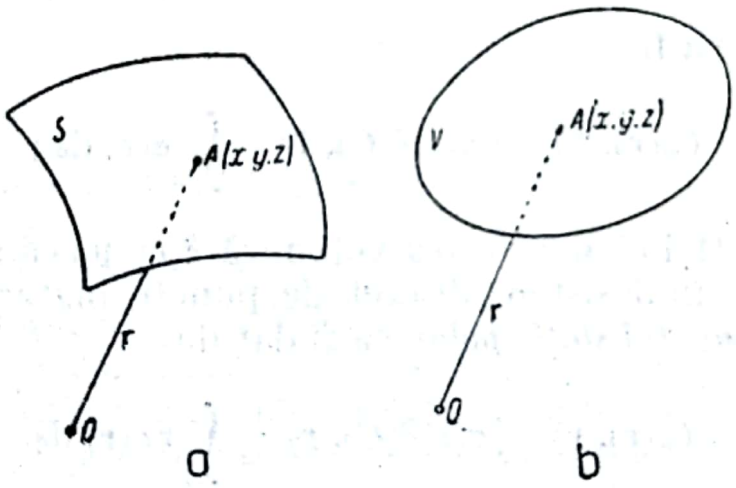


Fig. 3.19.

Masa totală se va exprima prin

$$M = (\rho(\mathbf{r}), 1) = (\sigma(\mathbf{r})\delta(S), 1) = \int_S \sigma(\mathbf{r})\,\mathrm{d}S, \tag{3.3.40}$$

momentul static polar va fi dat de

$$\mathbf{S}_o = (\rho(\mathbf{r}), \mathbf{r}) = (\sigma(\mathbf{r})\delta(S), \mathbf{r}) = \int_S \mathbf{r}\,\sigma(\mathbf{r})\,\mathrm{d}S, \tag{3.3.41}$$

Scanned with OKEN Scanner

iar *momentul de inerţie polar* se va scrie

$$I_O = (\rho(\mathbf{r}), \mathbf{r}^2) = (\sigma(\mathbf{r})\delta(S), \mathbf{r}^2) = \int_S \mathbf{r}^2 \sigma(\mathbf{r})\, dS. \quad (3.3.42)$$

Distribuţiile corespunzătoare *momentului static polar* şi *momentului de inerţie polar* vor fi date de

$$\vec{\mathcal{S}}_O = \mathbf{r}\rho(\mathbf{r}) = \mathbf{r}\sigma(\mathbf{r})\delta(S), \quad \mathcal{J}_O = \mathbf{r}^2\rho(\mathbf{r}) = \mathbf{r}^2\sigma(\mathbf{r})\,\delta(S), \quad (3.3.43)$$

iar centrul de masă va fi precizat prin vectorul de poziţie

$$\mathbf{r}_c = \left(\frac{1}{M}\vec{\mathcal{S}}_O, 1\right) = \left(\frac{1}{M}\mathbf{r}\,\sigma(\mathbf{r})\,\delta(S), 1\right) = \frac{1}{M}\int_S \mathbf{r}\,\sigma(\mathbf{r})\, dS. \quad (3.3.44)$$

În cazul unui continuum tridimensional, introducem distribuţia lui Dirac $\delta(V)$ concentrată pe volumul V, cu ajutorul formulei (1.4.6); dacă masa este distribuită cu densitatea $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma(x, y, z)$ (fig. 3.19, *b*), rezultă *densitatea volumică a continuumului tridimensional*

$$\rho(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r})\,\delta(V) = \sigma(x, y, z)\,\delta(V). \quad (3.3.45)$$

Masa totală va fi

$$M = (\rho(\mathbf{r}), 1) = (\sigma(\mathbf{r})\,\delta(V), 1) = \int_V \sigma(\mathbf{r})\, dV, \quad (3.3.46)$$

momentul static polar se va exprima prin

$$\mathbf{S}_O = (\rho(\mathbf{r}), \mathbf{r}) = (\sigma(\mathbf{r})\,\delta(V), \mathbf{r}) = \int_V \mathbf{r}\,\sigma(\mathbf{r})\, dV, \quad (3.3.47)$$

iar *momentul de inerţie polar* se va scrie

$$I_O = (\rho(\mathbf{r}), \mathbf{r}^2) = (\sigma(\mathbf{r})\,\delta(V), \mathbf{r}^2) = \int_V \mathbf{r}^2\,\sigma(\mathbf{r})\, dV. \quad (3.3.48)$$

Momentului static polar şi momentului de inerţie polar le vor corespunde distribuţiile

$$\vec{\mathcal{S}}_O = \mathbf{r}\,\rho(\mathbf{r}) = \mathbf{r}\,\sigma(\mathbf{r})\,\delta(V), \quad \mathcal{J}_O = \mathbf{r}^2\,\rho(\mathbf{r}) = \mathbf{r}^2\,\sigma(\mathbf{r})\,\delta(V), \quad (3.3.49)$$

Scanned with OKEN Scanner

centrul de masă fiind, în acest caz, precizat de vectorul de poziţie

$$\mathbf{r}_C = \left(\frac{1}{M}\vec{\mathcal{G}}_O, 1\right) = \left(\frac{1}{M}\mathbf{r}\,\sigma(\mathbf{r})\,\delta(V), 1\right) = \frac{1}{M}\int_V \mathbf{r}\,\sigma(\mathbf{r})\,dV. \tag{3.3.50}$$

3.3.2.3. Exemple

În cele ce urmează vom da două exemple de calcul în care apar atît mase distribuite, cît şi mase concentrate ; asemenea probleme se întîlnesc în cazul vibraţiilor unor elemente de structuri mecanice.

Fie bara dreaptă AB, de lungime l, acţionată de o masă uniform distribuită, cu densitatea liniară m_0, pe $\overline{AA_1}$ (segment de lungime a), şi de masele concentrate m_1 şi m_2, în punctele B_1, respectiv B_2, situate la distanţele b_1 şi b_2 de capătul A al barei (fig. 3.20, a). Alegem axa de coordonate Ax după axa barei.

Legea de repartiţie a masei barei se va exprima sub forma

$$m(x) = \overline{m}(x) + \overline{\overline{m}}(x), \tag{3.3.51}$$

unde

$$\overline{m}(x) = m_0\,\{x[\theta(x) - \theta(x-a)] + a\,\theta(x-a)\}$$

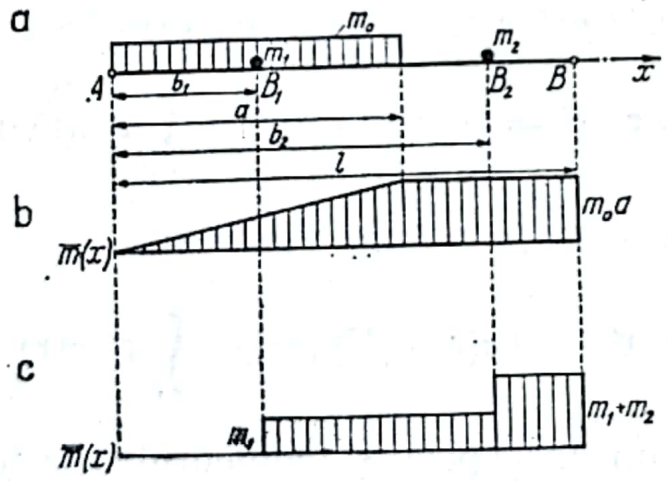


Fig. 3.20.

corespunde masei repartizate (fig. 3.20, b), iar

$$\overline{\overline{m}}(x) = m_1\,\theta(x-b_1) + m_2\,\theta(x-b_2)$$

Scanned with OKEN Scanner

corespunde maselor concentrate (fig. 3.20, *c*). Densitatea liniară se va calcula astfel :

$$\bar{\rho}(x) = \frac{\mathrm{d}\bar{m}(x)}{\mathrm{d}x} = m_0 [\theta(x) - \theta(x-a) + x\delta(x) - (x-a)\,\delta(x-a)],$$

$$\bar{\bar{\rho}}(x) = \frac{\mathrm{d}\bar{\bar{m}}(x)}{\mathrm{d}x} = m_1\delta(x-b_1) + m_2\,\delta(x-b_2),$$

așa că, în definitiv, putem scrie

$$\rho(x) = m_0[\theta(x) - \theta(x-a)] + m_1\delta(x-b_1) + m_2\delta(x-b_2). \tag{3.3.52}$$

Putem calcula, de exemplu, momentul de inerție în raport cu capătul A al barei sub forma

$$I_A = (\rho(x), x^2) = (m_0\,[\theta(x) - \theta(x-a)],\, x^2) + (m_1\,\delta(x-b_1) + m_2\,\delta(x-b_2),\, x^2) =$$

$$= \int_0^a m_0\,x^2\,\mathrm{d}x + m_1 b_1^2 + m_2\,b_2^2 = \frac{1}{3}\,m_0\,a^3 + m_1\,b_1^2 + m_2\,b_2^2. \tag{3.3.53}$$

Putem folosi, de asemenea, rezultatele de la 3.3.2.1 ; în acest caz, densitatea masei va fi

$$\rho(x) = m_0\delta\,(\overline{AB}) + m_1\,\delta(x-b_1) + m_2\,\delta(x-b_2), \tag{3.3.54}$$

unde am introdus distribuția lui Dirac concentrată pe segmentul $\overline{AB}$. Masa totală a barei se va scrie

$$M = (\rho(x), 1) = (m_0\,\delta(\overline{AB}) + m_1\delta(x-b_1) + m_2\delta(x-b_2), 1) =$$

$$= \int_{\overline{AB}} m_0\,\mathrm{d}x + m_1 + m_2 = \int_0^a m_0\,\mathrm{d}x + m_1 + m_2 =$$

$$= m_0 a + m_1 + m_2, \tag{3.3.55}$$

iar momentul de inerţie în raport cu capătul A al barei are expresia

$$I_A = (\rho(x), x^2) = (m_0\,\delta(\overline{AB}) + m_1\delta(x-b_1) + m_2\delta(x-b_2), x^2) =$$
$$= \int_{\overline{AB}} m_0 x^2\,dx + m_1 x^2|_{x=b_1} + m_2 x^2|_{x=b_2};$$

regăsim astfel rezultatul din formula (3.3.53).

Fie acum o placă dreptunghiulară $ABCD$, de dimensiuni a şi b, acţionată de o masă uniform distribuită de masă superficială m_0 şi de o masă concentrată m_1, în punctul A_1, de coordonate c şi d faţă de sistemul de axe de coordonate Axy (fig. 3.21). Densitatea masei va fi

$$\rho(x, y) = m_0\delta(S) + m_1\delta(x - c, y - d), \qquad (3.3.56)$$

unde am introdus distribuţia lui Dirac $\delta(S)$ concentrată pe dreptunghiul $ABCD$.

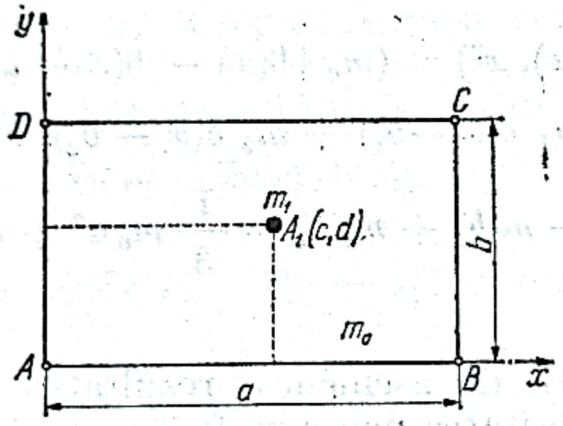


Fig. 3.21.

Masa totală a plăcii va fi

$$M = (\rho(x, y), 1) = (m_0\delta(S) + m_1\delta(x - c, y - d), 1) =$$
$$= \iint_{ABCD} m_0\,dx\,dy + m_1 = m_0\,ab + m_1, \qquad (3.3.57)$$

iar momentul de inerţie în raport cu axa Ox, de exemplu, se va scrie

$$I_x = (\rho(x, y), y^2) = (m_0\delta(S) + m_1\delta(x - c, y - d), y^2) =$$
$$= \iint_{ABCD} m_0 y^2\,dx\,dy + m_1 y^2|_{\substack{x=c\\y=d}} = \frac{1}{3}\,m_0 ab^3 + m_1 d^2. \qquad (3.3.58)$$

Scanned with OKEN Scanner

3.4. Reprezentarea prin distribuţii a unor mărimi electrice

3.4.1. *Sarcini electrice*

3.4.1.1. Densitatea unei sarcini electrice

Fie o *sarcină electrică*, de intensitate $\frac{q}{l}$, uniform repartizată pe segmentul OA de lungime l, situat pe axa Ox (fig. 3.22, *a*). Densitatea liniară a acestei sarcini va fi dată de funcţia

$$q_l(x) = \begin{cases} \frac{q}{l} \text{ pentru } x \in [0, l], \\ 0 \text{ în rest;} \end{cases} \tag{3.4.1}$$

funcţiei $q_l(x)$ îi corespunde o distribuţie care va fi notată în acelaşi fel, fiind definită prin relaţia

$$(q_l(x), \varphi(x)) = \frac{q}{l}\int_0^l \varphi(x)\,dx, \tag{3.4.2}$$

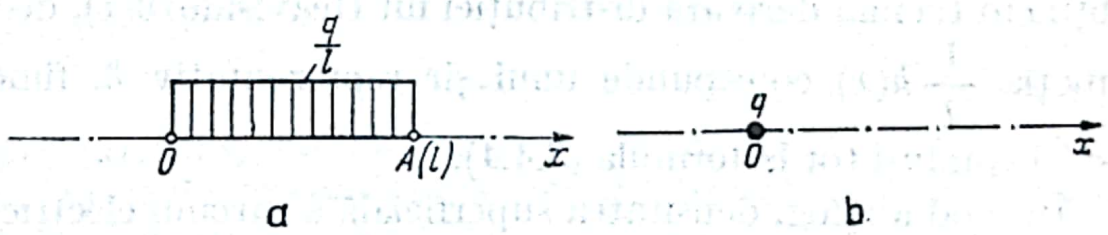


Fig. 3.22.

unde $\varphi(x) \in K(R)$ este o funcţie fundamentală. Pentru $l \to +0$ punctul $A \to 0$, astfel încît, aplicînd integralei din membrul al doilea formula mediei, obţinem

$$\lim_{l \to +0} (q_l(x), \varphi(x)) = \lim_{l \to +0} \left[\frac{q}{l}\, l\, \varphi(\xi)\right], \quad 0 < \xi < l;$$

în definitiv, putem scrie

$$\lim_{l \to +0} (q_l(x), \varphi(x)) = q \lim_{l \to +0} \varphi(\xi) = q\varphi(0) = (q\delta(x), \varphi(x)),$$

de unde rezultă relaţia

$$\lim_{l \to +0} q_l(x) = q\ \delta(x), \tag{3.4.3}$$

limita fiind considerată în sensul teoriei distribuţiilor.

În felul acesta, definim densitatea liniară a unei sarcini electrice punctuale, de intensitate q, situată în origine (fig. 3.22, *b*):

$$\rho(x) = q\ \delta(x). \tag{3.4.4}$$

Se poate ajunge la acest rezultat, observînd că relaţia (3.4.1) se exprimă prin

$$q_l(x) = \frac{q}{l} h(x),$$

unde

$$h(x) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } x \in [0, l] \\ 0 \text{ în rest,} \end{cases} = \theta(x + l) - \theta(x) \tag{3.4.5}$$

reprezintă funcţia caracteristică corespunzătoare intervalului $[0, l]$; dacă facem $l \to +0$, în sensul teoriei distribuţiilor, obţinem tocmai derivata distribuţiei lui Heaviside $\theta(x)$, deci funcţia $\frac{1}{l} h(x)$ corespunde unui şir reprezentativ δ, fiind astfel conduşi tot la formula (3.4.4).

În mod analog, densitatea superficială a sarcinii electrice punctuale de intensitate q, situată în origine, în planul Oxy, se va reprezenta prin distribuţia

$$\rho(x, y) = q\ \delta(x, y). \tag{3.4.6}$$

Pentru densitatea volumică a sarcinii electrice punctuale de intensitate q, situată în originea reperului ortonormal $Oxyz$, rezultă

$$\rho(x, y, z) = q\ \delta(x, y, z); \tag{3.4.7}$$

mai putem scrie această relaţie şi sub forma

$$\rho(\mathbf{r}) = q\ \delta(\mathbf{r}), \tag{3.4.7'}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\mathbf{r}$ este vectorul de poziție. Dacă această sarcină electrică punctuală este situată într-un punct A, de vector de poziție $\mathbf{r}_0$, rezultă (fig. 3.23)

$$\rho(\mathbf{r}) = q\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\,; \tag{3.4.8}$$

putem scrie această densitate volumică și sub forma

$$\rho(x, y, z) = q\,\delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0). \tag{3.4.8'}$$

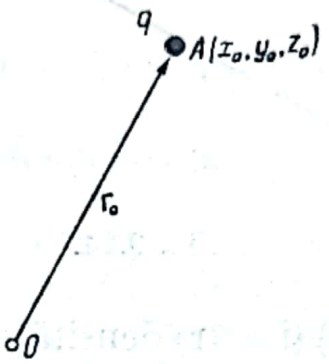


Fig. 3.23.

Aplicînd distribuția (3.4.7) unei funcții fundamentale $\varphi(x, y, z) \in K(R^3)$, cu valoarea 1 în origine, obținem

$$(\rho(x, y, z), \varphi(x, y, z) = (q\delta(x, y, z), \varphi(x, y, z)) =$$

$$= q\,\varphi(0, 0, 0) = q\,; \tag{3.4.9}$$

prin urmare, sarcina totală în spațiul R^3 este egală cu q, ceea ce evident corespunde sensului fizic al noțiunii de densitate și constituie o verificare a corectitudinii reprezentării (3.4.7).

3.4.1.2. Densitatea volumică a unui dipol electric

Un dipol electric este constituit dintr-un sistem de două sarcini electrice punctuale de intensități $-q$ și q, situate în punctele $A(x_0, y_0, z_0)$, respectiv $A'(x_0', y_0', z_0')$, la o distanță l una de cealaltă (fig. 3.24); admitem că această distanță este mică în raport cu distanța de la aceste sarcini pînă la punctele în care se determină intensitatea cîmpului. Dreapta determinată de punctele A și A' reprezintă *axa dipolului*, preci-

Scanned with OKEN Scanner

zată de versorul **u**, avînd sensul de la sarcina negativă către sarcina pozitivă. Expresia

$$D = ql \tag{3.4.10}$$

se numește, prin definiție, *momentul dipolului*.

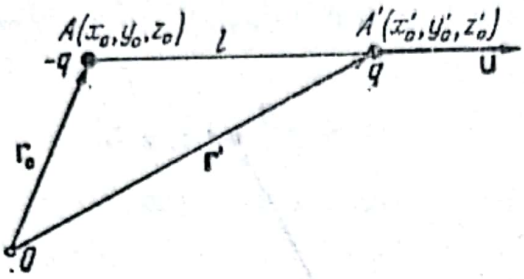


Fig. 3.24.

Să notăm cu $\rho_-(\mathbf{r})$ și $\rho_+(\mathbf{r})$ densitățile sarcinilor de intensitate $-q$, respectiv q și cu $\rho(\mathbf{r})$ densitatea dipolului. Putem scrie

$$\rho_l(\mathbf{r}) = \rho_+(\mathbf{r}) + \rho_-(\mathbf{r}) = q\,[\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_0) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)]$$

sau

$$\rho_l(\mathbf{r}) = -\frac{D}{l}\,[\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_0)]. \tag{3.4.11}$$

Definiția 3.4.1. Numim *densitate volumică a dipolului electric*, concentrat în punctul A, limita, în sensul teoriei distribuțiilor, a densității ρ_l pentru $A' \to A$, $(l \to +0)$, dacă momentul D al dipolului este constant.

În acest caz, putem scrie

$$\rho(\mathbf{r}) = \lim_{l \to +0} \rho_l(\mathbf{r}) = -D \lim_{l \to +0} \frac{1}{l}\,[\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_0)]$$

și, ținînd seama de derivata direcțională a distribuției lui Dirac, introdusă prin formula (3.2.6), rezultă

$$\rho(\mathbf{r}) = -D\frac{\partial}{\partial u}\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = -D\,\mathbf{u}\cdot\operatorname{grad}\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \tag{3.4.12}$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă că densitatea volumică a unui dipol electric este caracterizată prin :

a) punctul de aplicaţie $A(\mathbf{r}_0)$ al dipolului ;

b) versorul $\mathbf{u}$ care precizează direcţia după care se face trecerea la limită ;

c) mărimea D a momentului dipolului.

Semnul acestei densităţi depinde de sensul versorului $\mathbf{u}$, definit după cum s-a arătat mai sus.

3.4.2. *Stratul electric pe o curbă sau pe o suprafaţă*

3.4.2.1. Densitatea stratului electric simplu pe o curbă sau pe o suprafaţă

Fie C o curbă netedă de porţiuni, pe care avem repartizată o sarcină electrică (*strat electric simplu*) de densitate liniară $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma(x, y, z)$ (fig. 3.25, *a*). Am văzut că densitatea volumică corespunzătoare unei sarcini q, situată în origine, este dată de formula (3.4.7′) ; extinzînd această expresie, putem defini *densitatea volumică* a unui strat electric simplu pe curba C, repartizat cu densitatea liniară $\sigma(x, y, z)$, prin distribuţia

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho(x, y, z) = \sigma(\mathbf{r})\delta(C), \qquad (3.4.13)$$

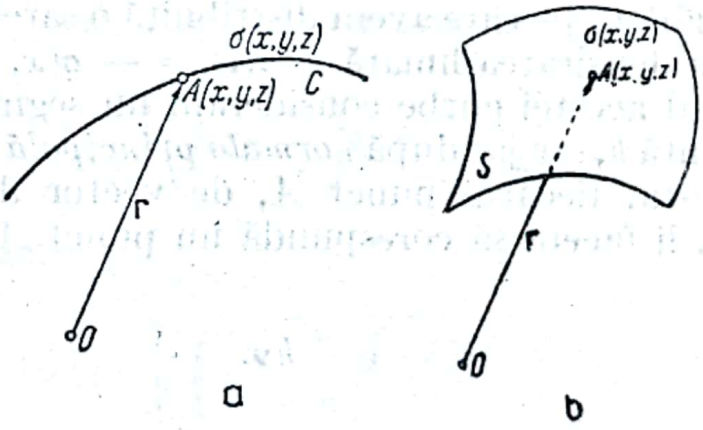


Fig. 3.25.

unde $\delta(C)$ reprezintă distribuţia lui Dirac concentrată pe curba C. Distribuţia (3.4.13) va fi definită prin relaţia

$$(\rho(x, y, z),\ \varphi(x, y, z)) = \int_C \sigma(x, y, z)\, \varphi(x, y, z)\, ds,$$
$$\varphi(x, y, z) \in K(R^3). \qquad (3.4.13')$$

Scanned with OKEN Scanner

În mod analog, dacă în locul curbei C considerăm o suprafață S, pe care avem repartizată o sarcină electrică (*strat electric simplu*) de densitate superficială $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma(x, y, z)$ (fig. 3.25, *b*), atunci *densitatea volumică* corespunzătoare va fi dată de distribuția

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho(x, y, z) = \sigma(\mathbf{r})\, \delta(S), \tag{3.4.14}$$

definită prin relația

$$(\rho(x, y, z), \varphi(x, y, z)) = \int_S \sigma(x, y, z)\, \varphi(x, y, z)\, \mathrm{d}S,$$

$$\varphi(x, y, z) \in K(R^3),$$

unde $\delta(S)$ reprezintă distribuția lui Dirac concentrată pe suprafața S.

Observăm că densitățile volumice (3.4.13) și (3.4.14) sînt egale cu zero pentru orice punct $(x, y, z) \notin C$, respectiv pentru orice punct $(x, y, z) \notin S$; de altfel, aceasta constituie și o verificare a corectitudinii reprezentării de mai înainte.

3.4.2.2. Densitatea stratului electric dublu pe o curbă sau pe o suprafață

Fie o curbă C, pe care avem distribuită o sarcină electrică negativă cu densitatea liniară $-\sigma(\mathbf{r}) = -\sigma(x, y, z)$. În fiecare punct al acestei curbe considerăm un segment de lungime constantă h, dirijat după *normala principală* de versor $\boldsymbol{\nu}$; în felul acesta, fiecărui punct A, de vector de poziție $\mathbf{r}$, al curbei C, îi facem să corespundă un punct A', de vector de poziție

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + h\boldsymbol{\nu}, \tag{3.4.15}$$

construind astfel o nouă curbă C' (fig. 3.26, *a*).

Dacă $\boldsymbol{\tau}$ și $\boldsymbol{\tau}'$ sînt versorii *tangentelor* la curbele C, respectiv C', în punctele A, respectiv A', iar s și s' sînt coordonatele curbilinii pe aceleași curbe, putem scrie

$$\boldsymbol{\tau}' = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}s'} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s'} = \left(\boldsymbol{\tau} + h\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\nu}}{\mathrm{d}s}\right)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s'};$$

Scanned with OKEN Scanner

folosind *formula lui Frenet*

$$\frac{d\nu}{ds} = -\frac{1}{\rho}\tau + \frac{1}{\rho'}\beta\,, \tag{3.4.16}$$

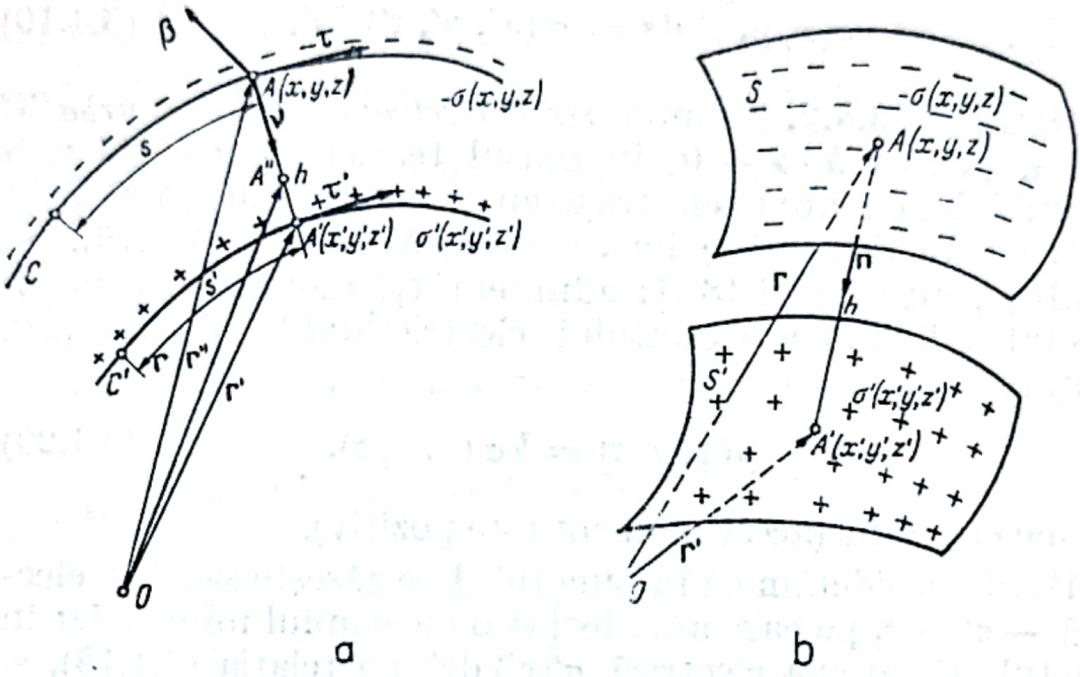


Fig. 3.26.

unde β este versorul *binormalei* la curba C, ρ este *raza de curbură*, iar ρ' este *raza de torsiune* în punctul A, rezultă

$$\tau' = \left[\left(1 - \frac{h}{\rho}\right)\tau + \frac{h}{\rho'}\beta\right]\frac{ds}{ds'}. \tag{3.4.17}$$

Mai putem scrie și

$$ds' = \sqrt{\left(1 - \frac{h}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{h}{\rho'}\right)^2}\,ds, \tag{3.4.18}$$

exprimînd astfel elementul de arc pe curba C' cu ajutorul elementului de arc pe curba C; în cazul unei curbe plane, $\frac{1}{\rho'} = 0$, iar relația (3.4.18) capătă forma

$$ds' = \left(1 - \frac{h}{\rho}\right)ds. \tag{3.4.18'}$$

Pe curba C' astfel obținută, considerăm repartizată o sarcină electrică de sens opus cu cea de pe curba C, (deci pozitivă), avînd densitatea $\sigma'(\mathbf{r}') = \sigma'(x', y', z')$, astfel încît între densitățile liniare pe cele două curbe să aibă loc relația

$$\sigma(x, y, z)\, ds = \sigma'(x', y', z')\, ds'. \qquad (3.4.19)$$

Definiția 3.4.2. Numim *strat electric dublu pe curba* C limita, pentru $h \to +0$, în sensul teoriei distribuțiilor, a ansamblului de sarcini electrice repartizate pe curbele C și C', pentru care densitățile liniare verifică relația (3.4.19), cu (3.4.18) [sau cu (3.4.18′)]; admitem că momentul (sau intensitatea liniară a) stratului electric dublu, definit prin relația

$$\mu(x, y, z) = h\sigma\,(x, y, z), \qquad (3.4.20)$$

rămîne constant (acest moment este pozitiv).

Dacă considerăm că în punctul A se găsește sarcina electrică $-\sigma(\mathbf{r})ds$, pe care am afectat-o cu semnul minus, iar în punctul A' sarcina electrică $\sigma'(\mathbf{r}')\, ds'$, cu relația (3.4.19), și facem $h \to +0$, obținem un dipol electric, concentrat în punctul A; densitatea acestui dipol se exprimă sub forma $-\mu(\mathbf{r})\dfrac{\partial}{\partial \nu}\delta(A)\, ds$, ceea ce justifică definiția dată mai sus pentru stratul electric dublu.

Ansamblului de sarcini distribuite pe curbele C și C' îi corespunde distribuția

$$\rho_h(\mathbf{r}) = -\sigma(\mathbf{r})\,\delta(C) + \sigma'(\mathbf{r}')\,\delta(C'); \qquad (3.4.21)$$

introducînd funcția fundamentală $\varphi(\mathbf{r}) \in K(R^3)$, putem scrie

$$(\rho_h(\mathbf{r}), \varphi(\mathbf{r})) = -\int_C \sigma(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})\, ds + \int_{C'} \sigma(\mathbf{r}')\varphi(\mathbf{r}')ds'$$

sau, în baza relației (3.4.19),

$$(\rho_h(\mathbf{r}), \varphi(\mathbf{r})) = -\int_C \sigma(\mathbf{r})[\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}')]\, ds.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă ţinem seama de relaţia (3.4.15) şi aplicăm formula creşterilor finite, rezultă

$$(\rho_h(\mathbf{r}),\ \varphi(\mathbf{r})) = \int_C h\,\sigma(\mathbf{r})\,\frac{\partial}{\partial \nu}\,\varphi(\mathbf{r}'')\,ds,$$

unde $\frac{\partial}{\partial \nu}$ reprezintă derivata direcţională după normala ν, într-un punct $A''(\mathbf{r}'')$ interior segmentului AA'; normala ν este îndreptată de la curba C, pe care este distribuită sarcina electrică negativă, către curba C', pe care este distribuită sarcina electrică pozitivă.

Folosind notaţia (3.4.20) şi făcînd $h \to +0$, obţinem

$$\lim_{h\to+0}(\rho_h(\mathbf{r}),\ \varphi(\mathbf{r})) = (\rho(\mathbf{r}),\ \varphi(\mathbf{r})) = \int_C \mu(\mathbf{r})\,\frac{\partial}{\partial \nu}\,\varphi(\mathbf{r})\,ds =$$

$$= \left(\delta(C),\ \mu(\mathbf{r})\,\frac{\partial}{\partial \nu}\,\varphi(\mathbf{r})\right) = \left(\mu(\mathbf{r})\ \delta(C),\ \frac{\partial}{\partial \nu}\,\varphi(\mathbf{r})\right),$$

de unde

$$(\rho(\mathbf{r}),\ \varphi(\mathbf{r})) = -\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\,[\mu(\mathbf{r})\delta(C)],\ \varphi(\mathbf{r})\right);$$

în definitiv, putem scrie

$$\rho(\mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial \nu}\,[\mu(\mathbf{r})\,\delta(C)], \qquad (3.4.22)$$

obţinînd astfel *densitatea volumică a stratului electric dublu pe curba C*. Observăm că relaţia (3.4.22) constituie o extindere a relaţiei (3.4.12), obţinută în cazul unui dipol electric.

În mod analog, vom considera două suprafeţe S şi S', trecerea de la un punct A, de vector de poziţie $\mathbf{r}$, la un punct A', de vector de poziţie $\mathbf{r}'$, făcîndu-se printr-o formulă de forma

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + h\mathbf{n}, \qquad (3.4.23)$$

unde $\mathbf{n}$ este versorul normalei interioare la suprafaţa S în punctul A (fig. 3.26, *b*). Pe suprafaţa S acţionează o sarcină

electrică de intensitate superficială $-\sigma(\mathbf{r}) = -\sigma(x, y, z)$, pe care o considerăm negativă, iar pe suprafaţa S' o sarcină electrică $\sigma'(\mathbf{r}') = \sigma'(x', y', z')$, astfel încît

$$\sigma(\mathbf{r})\, dS = \sigma'(\mathbf{r}')\, dS' ; \tag{3.4.24}$$

în felul acesta, normala $\mathbf{n}$ este îndreptată de la sarcina electrică negativă către sarcina electrică pozitivă.

Definiţia 3.4.3. Numim *strat electric dublu pe suprafaţa S* limita pentru $h \to +0$, în sensul teoriei distribuţiilor, a ansamblului de sarcini electrice repartizate pe suprafeţele S şi S', pentru care densitatea superficială verifică relaţia (3.4.24); admitem că momentul (sau intensitatea superficială a) stratului electric dublu, definit printr-o relaţie de forma (3.4.20), rămîne constant (acest moment este pozitiv).

Procedînd la fel ca mai sus, putem scrie

$$\rho(\mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial n}\,[\mu(\mathbf{r})\,\delta(S)], \tag{3.4.25}$$

obţinînd astfel *densitatea volumică a stratului electric dublu pe suprafaţa S*. Ca şi în cazul stratului electric dublu pe o curbă, distribuţia (3.4.25) corespunde repartiţiei dipolilor pe suprafaţa S, orientaţi după normala interioară $\mathbf{n}$ la suprafaţă, $\mu(\mathbf{r})$ fiind densitatea superficială a momentului.

Să considerăm, de exemplu, segmentul $\overline{AB}$, pe care este distribuită o sarcină electrică negativă de intensitate $-\sigma = -\dfrac{\mu}{h}$, şi segmentul $\overline{CD}$, paralel cu primul, ambele fiind situate în planul Oxy pe care este distribuită o sarcină electrică pozitivă de intensitate $\sigma = \mu/h$, unde h este distanţa dintre cele două segmente de dreaptă; segmentul $\overline{AB}$ este luat pe axa Ox (fig. 3.27). Aplicînd rezultatele de mai sus, obţinem densitatea stratului electric dublu pe segmentul $\overline{AB}$ sub forma

$$\rho(x, y) = -\frac{\partial}{\partial n}\,[\mu\,\delta(\overline{AB})] = -\,\mu\,\frac{\partial}{\partial y}\,\delta(\overline{AB}), \tag{3.4.26}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\delta(\overline{AB})$ reprezintă distribuţia lui Dirac concentrată pe acest segment.

Fie acum un strat electric dublu de moment $\mu(x, y)$, situat în planul Oxy, normala $\mathbf{n}$ fiind îndreptată în sensul pozitiv al axei Oz (fig. 3.28). Putem scrie

$$\rho(x, y, z) = -\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu(x, y)\,\delta(z = 0)\right];$$

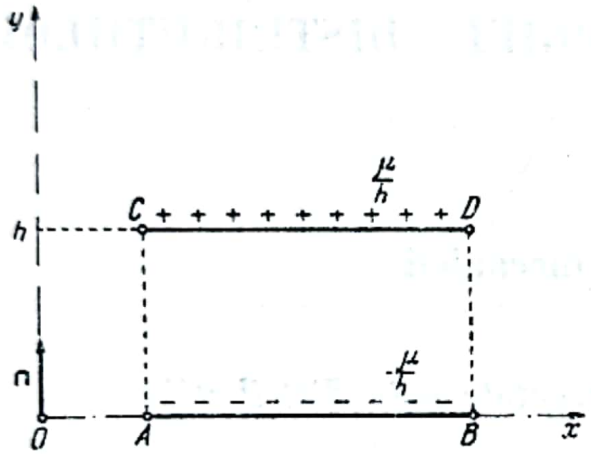


Fig. 3.27.

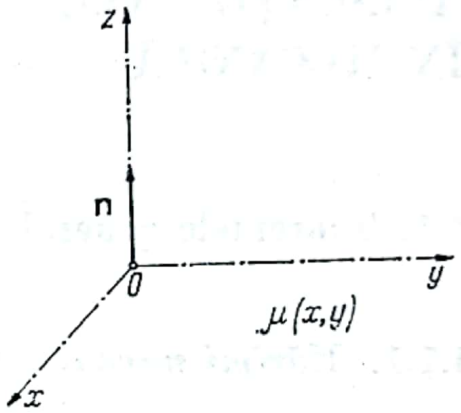


Fig. 3.28.

observînd că $\delta(Oxy) = \delta(z = 0) = \delta(z)$, deoarece

$$(\delta(z = 0),\ \varphi(x, y, z)) = \int_{z=0} \varphi(x, y, z)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{R^2} \varphi(x, y, 0)\,dx\,dy = (\delta(z),\ \varphi(x, y, z)),$$

cu $\varphi(x, y, z) \in K(R^3)$, rezultă

$$\rho(x, y, z) = -\mu(x, y)\,\frac{\partial}{\partial z}\,\delta(z) = -\mu(x, y)\,\delta'(z). \qquad (3.4.27)$$

APLICAȚII ALE TEORIEI DISTRIBUȚIILOR ÎN MECANICĂ

4.1. Teoremele generale ale mecanicii

4.1.1. *Mărimi mecanice reprezentate prin distribuții*

4.1.1.1. Modelul matematic al mecanicii

Modelul matematic al mecanicii newtoniene, în cadrul căreia vom considera că ne situăm, se bazează pe introducerea noțiunilor de *spațiu*, *timp* și *masă*, mărimile corespunzătoare fiind independente între ele. În mod esențial, la baza acestei mecanici stau *trei principii*, enunțate de Isaac Newton, constituind rezultatul a numeroase cercetări anterioare. Astfel :

a) *Un punct material asupra căruia nu acționează nici o forță are o mișcare rectilinie și uniformă* (principiul întîi al *inerției*).

b) *Mișcarea unui punct material este descrisă de ecuația diferențială*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\,\dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{F}, \tag{4.1.1}$$

unde $\mathbf{F}$ *este forța ce acționează asupra punctului material de masă* m, *iar* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ *este vectorul de poziție al acestui punct,*

Scanned with OKEN Scanner

în raport cu un punct fix (fig. 4.1). Dacă masa punctului material este constantă în timp, așa cum vom presupune, ecuația (4.1.1) se poate scrie sub forma

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}; \qquad (4.1.1')$$

aici punctul reprezintă derivata în raport cu variabila temporală (principiul al doilea al mecanicii).

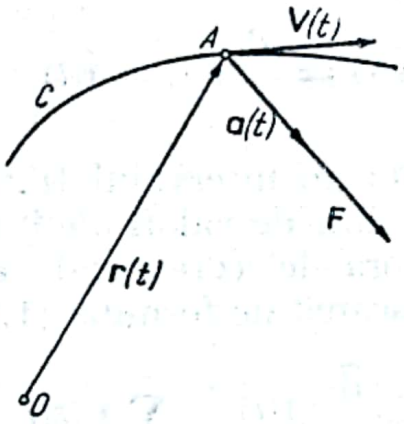


Fig. 4.1.

c) *Acțiunii unui corp asupra altui corp* (sau unui punct material asupra altui punct material) *îi corespunde o reacțiune a celui de-al doilea corp asupra primului, avînd aceeași direcție, aceeași mărime și sens contrar* (principiul al treilea al *acțiunii și reacțiunii*).

În general, se consideră că vectorul de poziție $\mathbf{r}(t)$ admite derivate continue de ordinul întîi și de ordinul al doilea (componentele sale sînt funcții de clasa C^2); de asemenea, se mai admite că forța $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t)$ este continuă atît în raport cu timpul, cît și în raport cu vectorul de poziție și viteza. În acest caz, ecuațiile diferențiale ale problemei se pot integra în baza unor anumite condiții inițiale date.

Există însă un mare număr de fenomene mecanice în care nu sînt respectate condițiile de continuitate; aceasta justifică necesitatea lărgirii cadrului clasic al mecanicii newtoniene și completării modelului matematic al acesteia, prin utilizarea metodelor teoriei distribuțiilor.

Scanned with OKEN Scanner

Fie $\mathbf{r}(t)$ *vectorul de poziție* al unui punct de masă m; *traiectoria* C (fig. 4.1) a acestui punct va fi dată de ecuația

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \tag{4.1.2}$$

și nu putem admite, din punct de vedere fizic, că are puncte de discontinuitate. Deci $\mathbf{r}(t)$ este o funcție continuă de variabila t.

Admitem că *viteza*

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) \tag{4.1.3}$$

este o funcție continuă în intervalul $[t', t'']$ considerat, cu excepția unui număr finit de valori ale lui t (valorile $t = t_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$), cărora le corespund discontinuități de prima speță. Ținînd seama de formula (1.2.31), putem scrie

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{r}(t) = \frac{\widetilde{\mathrm{d}}^2}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{r}(t) + \sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}_i\delta(t - t_i), \tag{4.1.4}$$

unde

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{v}(t_i + 0) - \mathbf{v}(t_i - 0), \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.1.5}$$

reprezintă saltul vitezei, corespunzător momentului de discontinuitate t_i, iar semnul tilda corespunde derivatei în sens obișnuit.

Introducem notațiile

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{r}(\mathrm{t}),\ \widetilde{\mathbf{a}}(t) = \frac{\widetilde{\mathrm{d}}^2}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{r}(t),\ \mathbf{a}_c(t) = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{V}_i\delta(t - t_i), \tag{4.1.6}$$

unde $\mathbf{a}(t)$ este accelerația în sensul teoriei distribuțiilor (accelerația generalizată), $\widetilde{\mathbf{a}}(t)$ este accelerația în sens obișnuit, iar $\mathbf{a}_c(t)$ este accelerația complementară datorită discontinuităților; relația (4.1.4) capătă forma

$$\mathbf{a}(t) = \widetilde{\mathbf{a}}(t) + \mathbf{a}_c(t). \tag{4.1.7}$$

Teorema 4.1.1. *Accelerația unui punct material, în sensul teoriei distribuțiilor, este egală cu distribuția definită de accelerația acestui punct în sens obișnuit, acolo unde aceasta există,*

Scanned with OKEN Scanner

la care se adaugă suma produselor salturilor vitezei punctului, prin distribuția lui Dirac.

Ținînd seama de relația (4.1.1′), introducem notațiile

$$\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t), \quad \widetilde{\mathbf{F}}(t) = m\,\widetilde{\mathbf{a}}(t), \quad \mathbf{F}_c(t) = m\,\mathbf{a}_c(t), \tag{4.1.8}$$

unde $\mathbf{F}(t)$ este forța generalizată (în sensul teoriei distribuțiilor), $\widetilde{\mathbf{F}}(t)$ este forța în sens obișnuit, iar $\mathbf{F}_c(t)$ este forța complementară, datorită discontinuităților; relația (4.1.7) devine

$$\mathbf{F}(t) = \widetilde{\mathbf{F}}(t) + \mathbf{F}_c(t). \tag{4.1.9}$$

Teorema 4.1.2. *Forța generalizată (în sensul teoriei distribuțiilor), care acționează asupra unui punct material, este egală cu suma dintre forța în sens obișnuit și forța complementară (datorită discontinuităților), care acționează asupra aceluiași punct.*

În acest caz, se poate afirma că, prin introducerea accelerațiilor și forțelor generalizate, ca și prin utilizarea derivatelor în sensul teoriei distribuțiilor, principiul al doilea al mecanicii, dat de formula (4.1.1′), poate fi utilizat și în cadrul teoriei distribuțiilor.

În ceea ce privește principiul inerției, vom admite că și pentru forța generalizată $\mathbf{F} = 0$ avem $\mathbf{a} = 0$, adică

$$\widetilde{\mathbf{a}}(t) + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}_i \delta(t - t_i) = 0. \tag{4.1.10}$$

Considerînd funcția fundamentală arbitrară $\varphi(t)$, al cărei suport nu conține momentele t_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, relația (4.1.10) ne conduce la

$$(\widetilde{\mathbf{a}}(t),\ \varphi(t)) = 0,$$

de unde deducem că funcția $\widetilde{\mathbf{a}}(t)$ este peste tot nulă, eventual cu excepția momentelor t_i. Fie acum o funcție fundamentală $\varphi(t)$, astfel încît suportul ei să conțină numai momentul t_i; obținem

$$\mathbf{V}_i \varphi(t_i) = 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă $\mathbf{V}_i = 0$. Procedînd în acest fel pentru $i = 1, 2, \ldots, n$, obţinem

$$\mathbf{V}_i = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

înlocuind în (4.1.10) rezultă $\hat{\mathbf{a}}(t) = 0$, deci punctul material descrie o mişcare rectilinie şi uniformă. În concluzie, principiul inerţiei se aplică şi în cazul forţelor generalizate. De asemenea, principiul acţiunii şi reacţiunii se aplică ca şi în cazul forţelor obişnuite.

4.1.1.3. Impuls. Moment cinetic

Produsul dintre masa şi viteza punctului material este un vector, care poartă numele de *impuls al punctului material* şi este dat de

$$\mathbf{H}(t) = m\,\mathbf{v}(t). \tag{4.1.11}$$

Impulsul unui punct material este o funcţie continuă în intervalul de timp considerat, cu excepţia momentelor t_i, $(i=1,2, \ldots, n)$, unde apar discontinuităţi de prima speţă.

În cazul unui sistem de puncte materiale, impulsul total va fi suma impulsurilor fiecărui punct în parte. În cazul unui corp continuu, impulsul total se obţine integrînd, pe tot domeniul ocupat de corp, impulsul unui element de masă; un rol important în această direcţie este jucat de integrala Stieltjes. Asemenea consideraţii se pot face pentru toate mărimile pe care le introducem în cele ce urmează; ne vom mărgini însă la consideraţii privitoare la un singur punct material.

Saltul impulsului la un moment de discontinuitate t_i este dat de

$$(\Delta\,\mathbf{H})_i = m\,\mathbf{V}_i = m\,[\mathbf{v}(t_i + 0) - \mathbf{v}(t_i - 0)], \tag{4.1.12}$$

exprimîndu-se cu ajutorul saltului vitezei la acelaşi moment.

Vom introduce şi mărimile

$$\int_{t'}^{t''} \mathbf{F}(t)\,dt, \quad \int_{t'}^{t''} \tilde{\mathbf{F}}(t)\,dt, \quad \int_{t'}^{t''} \mathbf{F}_c(t)\,dt, \tag{4.1.13}$$

Scanned with OKEN Scanner

care reprezintă *impulsul forței generalizate*, corespunzător intervalului de timp $[t', t'']$, respectiv *impulsul forței obișnuite* și *impulsul forței complementare*, pe același interval de timp; pentru prima și a treia dintre aceste mărimi am adoptat notații clasice, pentru a avea un simbolism uniform, deși integralele respective nu au sens — în general — din punctul de vedere al teoriei distribuțiilor.

Observînd că

$$\int_{t'}^{t''} \mathbf{F}_c(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{t'}^{t''} m\,\mathbf{V}_i \delta(t - t_i)\,dt = \sum_{i=1}^{n} m\,\mathbf{V}_i,\ t_i \in (t', t''),$$

și ținînd seama de (4.1.9), putem scrie

$$\int_{t'}^{t''} \mathbf{F}(t)\,dt = \int_{t'}^{t''} \tilde{\mathbf{F}}(t)\,dt + \sum_{i=1}^{n} (\Delta \mathbf{H})_i \cdot \qquad (4.1.14)$$

Teorema 4.1.3. *Impulsul forței generalizate ce acționează asupra unui punct material, într-un anumit interval de timp, este egal cu impulsul forței obișnuite ce acționează asupra acestui punct, în același interval de timp, la care se adaugă suma salturilor impulsului punctului material, corespunzătoare momentelor de discontinuitate.*

Momentul cinetic al unui punct material poate fi introdus cu ajutorul relației

$$\mathbf{K}_o(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{H}(t) = \mathbf{r}(t) \times [m\,\mathbf{v}(t)]; \qquad (4.1.15)$$

prin urmare, momentul cinetic al unui punct material este momentul impulsului acelui punct, luat în raport cu polul reperului considerat; aici „$\times$" reprezintă semnul *produsului vectorial*.

Saltul momentului cinetic la un moment de discontinuitate t_i este

$$(\Delta \mathbf{K})_i = m\,\mathbf{r}(t_i) \times \mathbf{v}(t_i + 0) - m\,\mathbf{r}(t_i) \times \mathbf{v}(t_i - 0) =$$
$$= m\,\mathbf{r}(t_i) \times \mathbf{V}_i = \mathbf{r}(t_i) \times (\Delta \mathbf{H})_i \qquad (4.1.16)$$

și se exprimă cu ajutorul saltului impulsului (sau cu ajutorul saltului vitezei) la același moment.

Introducem și mărimile

$$\int_{t'}^{t''} \mathbf{M}_o \mathbf{F}(t)\,dt,\ \int_{t'}^{t''} \mathbf{M}_o \tilde{\mathbf{F}}(t)\,dt,\ \int_{t'}^{t''} \mathbf{M}_o \mathbf{F}_c(t)\,dt, \qquad (4.1.17)$$

Scanned with OKEN Scanner

care reprezintă *integrala momentului forței generalizate*, corespunzătoare intervalului de timp $[t, t'']$, respectiv *integrala momentului forței obișnuite* și *integrala momentului forței complementare*. În general, prima și a treia dintre aceste integrale nu au sens din punctul de vedere al teoriei distribuțiilor; am adoptat însă aceste notații clasice pentru a avea un simbolism uniform.

Plecînd de la relația (4.1.9), putem scrie

$$\int_{t'}^{t''} \mathbf{M}_O\mathbf{F}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t'}^{t''} \mathbf{M}_O\tilde{\mathbf{F}}(t)\,\mathrm{d}t + \int_{t'}^{t''} \mathbf{M}_O\mathbf{F}_c(t)\,\mathrm{d}t,$$

ceea ce ne conduce la

$$\int_{t'}^{t''} \mathbf{M}_O\,\mathbf{F}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t'}^{t''} \mathbf{M}_O\tilde{\mathbf{F}}(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n} (\Delta\mathbf{K})_i\,. \qquad (4.1.18)$$

Teorema 4.1.4. *Integrala momentului forței generalizate ce acționează asupra unui punct material, într-un anumit interval de timp, este egală cu integrala momentului forței obișnuite ce acționează asupra acestui punct, în același interval de timp, la care se adaugă suma saltnrilor momentului cinetic al punctului material, corespunzătoare momentelor de discontinuitate.*

4.1.1.4. Lucru mecanic. Energie cinetică

Lucrul mecanic efectuat de forța $\mathbf{F}(t)$ în intervalul de timp $[t', t'']$ va fi

$$L = \int_{t'}^{t''} \mathbf{F}(t)\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}(t), \qquad (4.1.19)$$

unde „$\cdot$" reprezintă *produsul scalar*.

Introducem notațiile

$$L_F = \int_{t'}^{t''} \mathbf{F}(t)\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}(t),\quad L_{\tilde{F}} = \int_{t'}^{t''} \tilde{\mathbf{F}}(t)\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}(t),\quad L_{F_c} = \int_{t'}^{t''} \mathbf{F}_c(t)\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}(t), \qquad (4.1.20)$$

unde L_F este *lucrul mecanic al forței generalizate* $\mathbf{F}(t)$, $L_{\tilde{F}}$ este *lucrul mecanic al forței obișnuite* $\tilde{\mathbf{F}}(t)$, iar L_{F_c} este *lucrul mecanic al forței complementare* $\mathbf{F}_c(t)$. Prima și a treia dintre

Scanned with OKEN Scanner

aceste integrale nu au sens în general din punctul de vedere al teoriei distribuţiilor ; pentru uniformitatea simbolismului, adoptăm însă aceste notaţii clasice. Vom putea scrie

$$L_F = L_{\tilde{F}} + L_{F_c}. \tag{4.1.21}$$

Teorema 4.1.5. *Lucrul mecanic al forţei generalizate ce acţionează asupra unui punct material într-un anumit interval de timp este egal cu suma dintre lucrul mecanic al forţei obişnuite, care acţionează asupra punctului material în acelaşi interval de timp, şi lucrul mecanic al forţei complementare, acţionînd asupra acestui punct în intervalul de timp considerat.*

Energia cinetică a punctului material este dată de relaţia

$$T = \frac{1}{2} m\, v^2(t). \tag{4.1.22}$$

Dacă t_i este un moment de discontinuitate, vom putea scrie relaţiile

$$\lim_{t \to t_i - 0} T(t) = \frac{1}{2}\, m [\lim_{t \to t_i - 0} v(t)]^2 = \frac{1}{2} m\, v^2(t_i - 0), \tag{4.1.23}$$

$$\lim_{t \to t_i + 0} T(t) = \frac{1}{2} m [\lim_{t \to t_i + 0} v(t)]^2 = \frac{1}{2} m\, v^2(t_i + 0),$$

ceea ce demonstrează că momentele de discontinuitate ale vitezei sînt şi momente de discontinuitate ale energiei cinetice.

4.1.2. *Teoremele generale ale mecanicii pentru un punct material*

4.1.2.1. Teorema impulsului

În cadrul teoriei distribuţiilor, principiul al doilea al mecanicii are forma

$$\mathbf{F}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} [m\, \mathbf{v}(t)]; \tag{4.1.24}$$

Scanned with OKEN Scanner

în cazul în care nu apar discontinuităţi, el devine

$$\tilde{\mathbf{F}}(t) = \frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}[m\,\mathbf{v}(t)].$$

Observăm că

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{H}(t) = \frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\mathbf{H}(t) + \sum_{i=1}^{n}(\Delta\mathbf{H})_i\,\delta(t-t_i),$$

unde saltul impulsului este dat de relaţia (4.1.12); ţinînd seama şi de relaţia

$$\mathbf{F}_c(t) = \sum_{i=1}^{n}(\Delta\mathbf{H})_i\delta(t-t_i), \tag{4.1.25}$$

care ne dă forţa complementară, găsim relaţia

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{H}(t) = \mathbf{F}(t) = \tilde{\mathbf{F}}(t) + \mathbf{F}_c(t). \tag{4.1.26}$$

Teorema 4.1.6. (*Teorema impulsului*). *Derivata în raport cu timpul, în sensul teoriei distribuţiilor, a impulsului unui punct material este egală cu forţa generalizată ce acţionează asupra acestui punct.*

4.1.2.2. Teorema momentului cinetic

În cazul în care viteza şi acceleraţia sînt funcţii continue (în sens obişnuit), putem scrie teorema momentului cinetic sub forma

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\mathbf{K}_o(t) = \frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\{\mathbf{r}(t)\times[m\,\mathbf{v}(t)]\} = \mathbf{r}(t)\times\tilde{\mathbf{F}}(t) = \mathbf{M}_o\tilde{\mathbf{F}}(t). \tag{4.1.27}$$

Dacă viteza are discontinuităţi de prima speţă, putem scrie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{K}_o(t) = \frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\mathbf{K}_o(t) + \sum_{i=1}^{n}(\Delta\mathbf{K})_i\delta(t-t_i),$$

Scanned with OKEN Scanner

unde saltul momentului cinetic este dat de relația (4.1.16). În acest caz, obținem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{K}_O(t) = \mathbf{M}_O\mathbf{F}(t) = \mathbf{M}_O\,\widetilde{\mathbf{F}}(t) + \mathbf{M}_O\,\mathbf{F}_c(t), \qquad (4.1.28)$$

unde momentul forței complementare este dat de

$$\mathbf{M}_O\,\mathbf{F}_c(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}(t_i) \times (\Delta\mathbf{H})_i\,\delta(t - t_i) = \sum_{i=1}^{n} (\Delta\mathbf{K})_i\,\delta(t - t_i).$$

Teorema 4.1.7. (*Teorema momentului cinetic*). *Derivata în raport cu timpul, în sensul teoriei distribuțiilor, a momentului cinetic al unui punct material este egală cu momentul forței generalizate ce acționează asupra acestui punct, în raport cu polul aceluiași reper.*

4.1.2.3. Teorema energiei cinetice

Din relația de definiție (4.1.19) obținem

$$L = \int_{t'}^{t''} m\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\mathbf{v}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t'}^{t''} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,T(t)\,\mathrm{d}t,$$

ceea ce ne conduce la teorema energiei cinetice în sens obișnuit, sub forma

$$L = T(t'') - T(t'). \qquad (4.1.29)$$

Pentru derivata în raport cu timpul a energiei cinetice putem scrie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,T(t) = \frac{\widetilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\,T(t) + \sum_{i=1}^{n} (\Delta T)_i\,\delta(t - t_i),$$

unde saltul energiei cinetice corespunzător momentului de discontinuitate t_i este

$$(\Delta T)_i = \frac{1}{2}\,m\,[v^2(t_i + 0) - v^2(t_i - 0)]. \qquad (4.1.30)$$

Scanned with OKEN Scanner

Folosind relaţia (4.1.21), rezultă

$$L_F = \int_{t'}^{t''} \frac{\hat{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\, T(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n} \int_{t'}^{t''} (\Delta T)_i \delta(t - t_i)\,\mathrm{d}t,$$

de unde

$$L_F = T(t'') - T(t') + \sum_{i=1}^{n} (\Delta T)_i. \tag{4.1.31}$$

Teorema 4.1.8. (*Teorema energiei cinetice*). *Lucrul mecanic al forţei generalizate ce acţionează asupra unui punct material într-un anumit interval de timp este egal cu diferenţa dintre energia cinetică la momentul final şi energia cinetică la momentul iniţial, la care se adaugă suma salturilor energiei cinetice a acestui punct, corespunzătoare momentelor de discontinuitate.*

4.1.3. *Teoremele generale ale mecanicii în cazul ciocnirilor elastice*

4.1.3.1. Consideraţii generale

Plecînd de la noţiunea de forţă generalizată şi de impuls al forţei generalizate, vom introduce noţiunea de percuţie a unui punct material, cu ajutorul formulei de definiţie

$$\mathbf{P} = \lim_{t''-t' \to +0} \int_{t'}^{t''} \mathbf{F}(t)\,\mathrm{d}t, \tag{4.1.32}$$

unde limita este considerată în sensul teoriei distribuţiilor.

Evident, nici în acest caz integrala scrisă nu are sens din punctul de vedere al teoriei distribuţiilor; folosim totuşi acest simbolism, pentru a putea fi cît mai apropiaţi de cel clasic.

Admitem, de asemenea, că intervalul $[t', t'']$ cuprinde un singur moment de discontinuitate t_0 şi este astfel încît $|t'' - t'| < \varepsilon$, unde $\varepsilon > 0$ şi arbitrar. În acest caz nu avem forţe obişnuite, ci forţe generalizate, mai precis apare distribuţia $\delta(t - t_0)$; în felul acesta, fenomenul de ciocnire nu se mai introduce în mecanică ca un fenomen special, ci ca un fenomen obişnuit, unde principiile mecanicii se aplică în condiţiile enunţate în 4.1.1.

Scanned with OKEN Scanner

Folosind o teoremă de medie, putem scrie

$$\lim_{t''-t'\to+0}\int_{t'}^{t''}\tilde{\mathbf{F}}(t)\,dt=0, \tag{4.1.33}$$

$$\lim_{t''-t'\to+0}\int_{t'}^{t''}\mathbf{M}_O\tilde{\mathbf{F}}(t)\,dt=0. \tag{4.1.33'}$$

Prin urmare, *impulsul forței obișnuite și integrala momentului forței obișnuite sînt mărimi ce pot fi neglijate în raport cu impulsul forței complementare, respectiv în raport cu integrala momentului forței complementare*, datorită discontinuităților; rezultă

$$\lim_{t''-t'\to+0}\int_{t'}^{t''}\mathbf{F}(t)\,dt=m\,\mathbf{v}_0 \tag{4.1.34}$$

și

$$\lim_{t''-t'\to+0}\int_{t'}^{t''}\mathbf{M}_O\mathbf{F}(t)\,dt=\mathbf{r}\times(m\,\mathbf{v}_0),$$

unde $\mathbf{r}_0$ este raza vectoare corespunzătoare momentului de discontinuitate, iar $\mathbf{v}_0$ este saltul vitezei, corespunzător aceluiași moment.

Teorema 4.1.6 capătă forma

$$(\Delta\mathbf{H})_0=\mathbf{P}. \tag{4.1.35}$$

Teorema 4.1.9. (*Teorema impulsului*). *Saltul impulsului unui punct material la un moment de discontinuitate este egal cu percuția ce acționează asupra acestui punct la acel moment.*

Folosind teorema 4.1.7 și notația (4.1.32), obținem

$$(\Delta\mathbf{K})_0=\mathbf{r}_0\times(\Delta\mathbf{H})_0=\mathbf{r}_0\times\mathbf{P}. \tag{4.1.36}$$

Teorema 4.1.10. (*Teorema momentului cinetic.*) *Saltul momentului cinetic al unui punct material* (care este egal cu *momentul saltului impulsului* acestui punct) *la un moment de discontinuitate este egal cu momentul percuției ce acționează asupra acestui punct la acel moment.*

Scanned with OKEN Scanner

Cele două momente se calculează în raport cu același pol al reperului considerat.

4.1.3.3. Teoremele energiei cinetice

Fie $\mathbf{v}'$ viteza punctului material înainte de ciocnire și $\mathbf{v}''$ viteza aceluiași punct după ciocnire; putem scrie teorema impulsului (4.1.35) sub forma

$$m\,\mathbf{v}_0 = m\,(\mathbf{v}'' - \mathbf{v}') = \mathbf{P}. \tag{4.1.35'}$$

Multiplicînd scalar această relație cu $\mathbf{v}''$, obținem

$$m\,\mathbf{v}''^2 - m\,\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}'' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}''$$

sau

$$T'' - T' + T_0 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}'', \tag{4.1.37}$$

unde

$$T' = \frac{1}{2} m\,\mathbf{v}'^2 \tag{4.1.38}$$

este energia cinetică înainte de ciocnire,

$$T'' = \frac{1}{2} m\,\mathbf{v}''^2$$

este energia cinetică după ciocnire, iar

$$T_0 = \frac{1}{2} m(\mathbf{v}'' - \mathbf{v}')^2 = \frac{1}{2} m\,\mathbf{v}_0^2$$

este energia cinetică a vitezei pierdute.

Variația energiei cinetice va fi dată de

$$(\Delta T)_0 = T'' - T'; \tag{4.13.9}$$

în felul acesta, putem scrie formula (4.1.37) sub forma

$$(\Delta T)_0 + T_0 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}''. \tag{4.1.37'}$$

Teorema 4.1.11. (*Teorema energiei cinetice*). *Suma dintre variația energiei cinetice a unui punct material la un moment de discontinuitate și energia cinetică a vitezei pierdute la același*

Scanned with OKEN Scanner

moment este egală cu produsul scalar dintre percuția ce acționează asupra punctului și viteza lui după acest moment de discontinuitate.

Dacă

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{v}'' = 0, \tag{4.1.40}$$

ceea ce se poate întîmpla, de exemplu, dacă viteza punctului material se anulează după ciocnire, obținem relația

$$(\Delta T)_0 + T_0 = 0. \tag{4.1.41}$$

Teorema 4.1.12. (*Teorema lui Carnot.*) *Dacă este îndeplinită condiția* (4.1.40), *atunci suma dintre variația energiei cinetice a unui punct material la un moment de discontinuitate și energia cinetică a vitezei pierdute la același moment este egală cu zero.*

Multiplicînd scalar relația (4.1.35′) cu $\mathbf{v}'$, căpătăm

$$m\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}'' - m\mathbf{v}'^2 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}'$$

sau

$$T'' - T' - T_0 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}', \tag{4.1.42}$$

de unde

$$(\Delta T)_0 - T_0 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}'. \tag{4.1.42′}$$

Teorema 4.1.11′. *Diferența dintre variația energiei cinetice a unui punct material la un moment de discontinuitate și energia cinetică a vitezei pierdute la același moment este egală cu produsul scalar dintre percuția ce acționează asupra punctului și viteza lui înainte de acest moment de discontinuitate.*

Aceasta constituie un *analog al teoremei energiei cinetice* în cazul fenomenului de ciocnire.

Dacă, în particular,

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{v}' = 0, \tag{4.1.40′}$$

rezultă $(\Delta T)_0 = T_0$.

Teorema 4.1.12′. *Dacă este îndeplinită condiția* (4.1.40′), *atunci variația energiei cinetice a unui punct material la un moment de discontinuitate este egală cu energia cinetică a vitezei pierdute la același moment.*

Scanned with OKEN Scanner

Aceasta reprezintă un *analog al teoremei lui Carnot* în cazul fenomenului de ciocnire.

Adunînd relaţiile (4.1.37′) şi (4.1.42′) membru cu membru, obţinem

$$(\Delta T)_0 = \frac{1}{2}\,\mathbf{P}\cdot(\mathbf{v}' + \mathbf{v}''). \tag{4.1.43}$$

Teorema 4.1.13. (*Teorema lui Kelvin*) *.Variaţia energiei cinetice a unui punct material la un moment de discontinuitate este egală cu produsul scalar dintre percuţia ce acţionează asupra acestui punct şi semisuma vitezelor punctului înainte şi după fenomenul de discontinuitate.*

Prin scăderea relaţiilor (4.1.37′) şi (4.1.42′) membru cu membru, căpătăm

$$T_0 = \frac{1}{2}\,\mathbf{P}\cdot(\mathbf{v}'' - \mathbf{v}') = \frac{1}{2}\,\mathbf{P}\cdot\mathbf{v}_0.$$

Teorema 4.1.13′. *Energia cinetică a vitezei pierdute a unui punct material la un moment de discontinuitate este egală cu jumătate din produsul scalar dintre percuţia ce acţionează asupra acestui punct şi saltul vitezei la momentul de discontinuitate.*

Aceasta constituie un *analog al teoremei lui Kelvin* în cazul fenomenului de ciocnire.

4.2. Probleme de tip Cauchy

4.2.1. *Dinamica punctului material*

4.2.1.1. Dinamica punctului material liber

Mişcarea unui punct material liber este guvernată de principiul al doilea al lui Newton. Vom considera ecuaţia de mişcare (4.1.1′), unde $\mathbf{F}(t)$ este forţa generalizată (4.1.9), iar derivarea se face în sensul teoriei distribuţiilor. Admitem că vectorul $\mathbf{r}(t)$ este definit pentru $t \in R$. Aceasta reprezintă una din metodele de exprimare a ecuaţiei de mişcare în

Scanned with OKEN Scanner

distribuţii, condiţiile la limită trebuind să fie precizate separat.

Dacă dorim să includem condiţiile la limită în ecuaţia de mişcare, folosim alt procedeu. Utilizăm aceeaşi ecuaţie de mişcare (4.1.1'), dar forţa ce apare este forţa în sens obişnuit

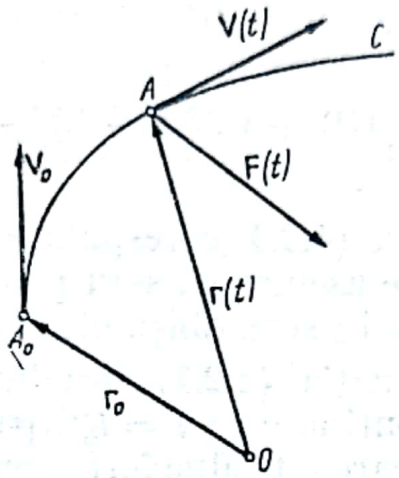


Fig 4.2.

$\tilde{\mathbf{F}}(t)$, derivarea efectuîndu-se tot în sens obişnuit; vom scrie

$$m \frac{\tilde{\mathrm{d}}^2}{\mathrm{d}t^2} \mathbf{r}(t) = \tilde{\mathbf{F}}(t), \quad t > t_0. \tag{4.2.1}$$

Admitem că la momentul iniţial $t = t_0$ vectorul de poziţie şi viteza sînt daţi de $\mathbf{r}_0$, respectiv $\mathbf{v}_0$; acestea sînt *condiţii iniţiale de tip Cauchy* (fig. 4.2).

Introducem o nouă funcţie $\bar{r}(t)$, definită pentru $t \in R$ prin relaţia

$$\bar{\mathbf{r}}(t) = \theta(t - t_0)\,\mathbf{r}(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t < t_0, \\ \mathbf{r}_0 & \text{pentru } t = t_0, \\ \mathbf{r}(t) & \text{pentru } t > t_0; \end{cases} \tag{4.2.2}$$

viteza se va exprima sub forma

$$\bar{\mathbf{v}}(t) = \theta(t - t_0)\,\mathbf{v}(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t < t_0, \\ \mathbf{v}_0 & \text{pentru } t = t_0, \\ \mathbf{v}(t) & \text{pentru } t > t_0. \end{cases} \tag{4.2.3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Observăm astfel că $\mathbf{r}_0$ și $\mathbf{v}_0$ reprezintă saltul razei vectoare, respectiv saltul vitezei la momentul inițial $t = t_0$. Derivînd succesiv distribuția corespunzătoare funcției (4.2.2), obținem viteza și accelerația punctului material:

$$\bar{\mathbf{v}}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\bar{\mathbf{r}}(t) = \frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\,\bar{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{r}_0\,\delta(t - t_0), \qquad (4.2.4)$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,\bar{\mathbf{r}}\,(t) = \frac{\tilde{\mathrm{d}}^2}{\mathrm{d}t^2}\,\bar{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{v}_0\,\delta(t - t_0) + \mathbf{r}_0\,\dot{\delta}\,(t - t_0). \qquad (4.2.4')$$

Observăm că expresia (4.2.4) corespunde distribuției definite de relația (4.2.3); de asemenea, s-au pus în evidență viteza, respectiv accelerația în sens obișnuit.

Înlocuind în ecuația (4.2.1) și admițînd că pe lîngă momentul de discontinuitate $t = t_0$ apar și alte momente de discontinuitate, care introduc forța complementară (4.1.8), putem scrie ecuația fundamentală a mecanicii sub forma

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,\bar{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(t) + m\,\mathbf{v}_0\,\delta(t - t_0) + m\,\mathbf{r}_0\,\dot{\delta}\,(t - t_0), \qquad (4.2.5)$$

unde am introdus forța generalizată $\mathbf{F}(t)$. În felul acesta, condițiile inițiale sînt incluse în ecuația (4.2.5), exprimată în distribuții, această ecuație corespunzînd problemei lui Cauchy pentru ecuația (4.2.1).

Folosind formula (2.1.34), putem scrie o soluție particulară fundamentală a operatorului $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}$ sub forma

$$E(t) = t\theta(t) = t_+\,; \qquad (4.2.6)$$

în acest caz, soluția ecuației (4.2.5) va fi

$$\bar{\mathbf{r}}(t) = t\theta(t) * \left[\frac{1}{m}\,\mathbf{F}(t) + \mathbf{v}_0\,\delta(t - t_0) + \mathbf{r}_0\,\dot{\delta}\,(t - t_0)\right],$$

de unde rezultă

$$\bar{\mathbf{r}}(t) = \frac{1}{m}\,t\,\theta(t) * \mathbf{F}(t) + \mathbf{v}_0(t - t_0)_+ + \mathbf{r}_0\,\theta\,(t - t_0). \qquad (4.2.7)$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $\mathbf{F}(t)$ este o funcție local integrabilă, putem scrie

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{m}\int_0^t (t-\tau)\,\mathbf{F}(\tau)\,d\tau + (t-t_0)\,\mathbf{v}_0 + \mathbf{r}_0,\ t \geqslant t_0.$$

În cazul în care $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}; t)$, ecuația fundamentală rămîne în continuare de forma (4.2.5), forța în sensul teoriei distribuțiilor căpătînd evident acest caracter general. Pentru rezolvarea ecuației nu mai putem folosi metoda dată, deoarece trebuie să ținem seama de forma nouă, concretă a ecuației diferențiale de mișcare.

4.2.1.2. Mișcarea punctului material greu în vid

Fie un punct material greu în vid, supus deci acțiunii forței $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$, unde $\mathbf{g}$ este accelerația gravitației; problema Cauchy constă în determinarea razei vectoare $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, atunci cînd se cunosc raza vectoare $\mathbf{r}_0$ și viteza $\mathbf{v}_0$ la momentul inițial t_0 (fig. 4.3, *a*).

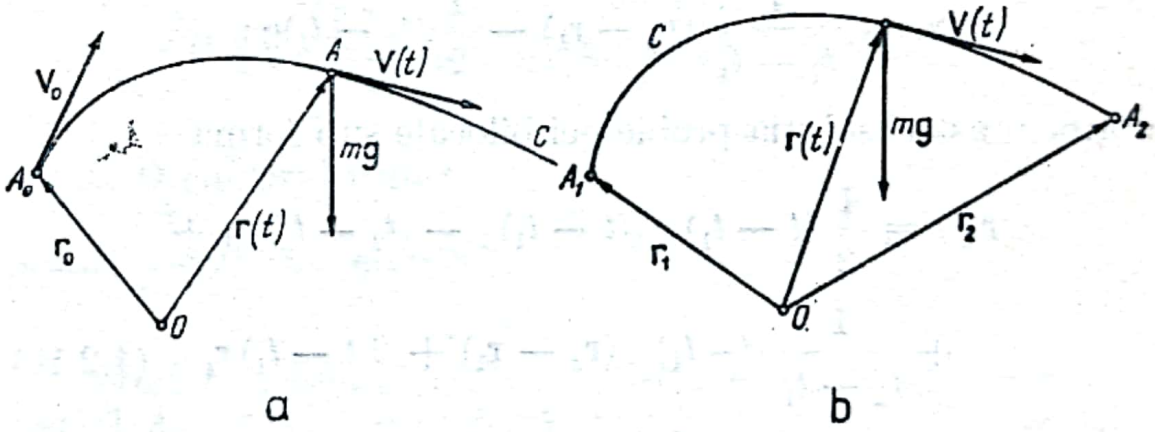


Fig. 4.3.

Formula (4.2.7) ne permite să scriem

$$\bar{\mathbf{r}}(t) = \frac{1}{2}(t-t_0)_+^2\,\mathbf{g} + (t-t_0)_+\,\mathbf{v}_0 + \theta(t-t_0)\mathbf{r}_0, \qquad (4.2.8)$$

de unde

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}(t-t_0)^2\,\mathbf{g} + (t-t_0)\,\mathbf{v}_0 + \mathbf{r}_0,\quad t \geqslant t_0.$$

Putem folosi acest rezultat și pentru rezolvarea unei probleme bilocale; astfel, dacă trebuie să determinăm miș-

Scanned with OKEN Scanner

carea punctului material greu în vid, pentru care se verifică condițiile (fig. 4.3, *b*)

$$\bar{\mathbf{r}}(t_1) = \mathbf{r}_1, \qquad \bar{\mathbf{r}}(t_2) = \mathbf{r}_2, \tag{4.2.9}$$

putem folosi în continuare o formulă de forma (4.2.8), admițînd cunoscută viteza la momentul inițial $t = t_1$. Rezultă

$$\bar{\mathbf{r}}(t) = \frac{1}{2}(t - t_1)_+ \mathbf{g} + (t - t_1)_+ \mathbf{v}_1 + \theta(t - t_1)\mathbf{r}_1.$$

Punînd și a doua condiție (4.2.9), putem scrie

$$\mathbf{r}_2 = \frac{1}{2}(t_2 - t_1)_+^2 \mathbf{g} + (t_2 - t_1)_+ \mathbf{v}_1 + \theta(t_2 - t_1)\mathbf{r}_1 =$$

$$= \frac{1}{2}(t_2 - t_1)^2 \mathbf{g} + (t_2 - t_1)\mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_1,$$

de unde

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{t_2 - t_1}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - \frac{1}{2}(t_2 - t_1)\mathbf{g};$$

obținem astfel soluția problemei bilocale sub forma

$$\bar{\mathbf{r}}(t) = \frac{1}{2}(t - t_1)_+ [(t - t_1)_+ - (t_2 - t_1)]\mathbf{g} +$$

$$+ \frac{1}{t_2 - t_1}(t - t_1)_+ (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \theta(t - t_1)\mathbf{r}_1 \tag{4.2.10}$$

sau

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}(t - t_1)(t - t_2)\mathbf{g} +$$

$$+ \frac{1}{t_2 - t_1}(t - t_1)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \mathbf{r}_1, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Vom considera și cazul problemei bilocale mixte, pentru care se pun condițiile la limită

$$\bar{\mathbf{r}}(t_1) = \mathbf{r}_1, \qquad \bar{\mathbf{v}}(t_2) = \mathbf{v}_2. \tag{4.2.11}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă ar fi cunoscută și viteza la momentul inițial $t = t_1$, am putea scrie

$$\mathbf{v}(t) = (t - t_1)_+ \mathbf{g} + \theta(t - t_1)\mathbf{v}_1 + \mathbf{r}_1 \delta(t - t_1);$$

punînd a doua condiție la limită (4.2.11), rezultă

$$\mathbf{v}_2 = (t_2 - t_1)\mathbf{g} + \mathbf{v}_1,$$

de unde

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 - (t_2 - t_1)\,\mathbf{g}.$$

Traiectoria punctului material va fi dată de relația

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}(t - t_1)_+ [(t - t_1)_+ - 2(t_2 - t_1)]\mathbf{g} + \\ + (t - t_1)_+ \mathbf{v}_2 + \theta(t - t_1)\mathbf{r}_1 \qquad (4.2.12)$$

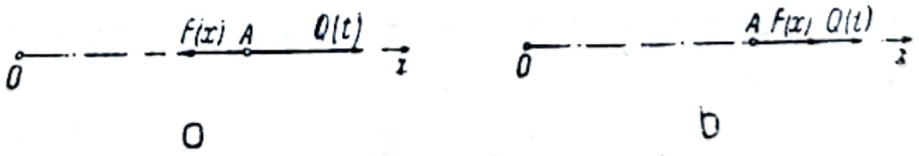
sau de relația

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}(t - t_1)(t - t_2)\mathbf{g} - \\ - (t - t_1)\left[\frac{1}{2}(t_2 - t_1)\,\mathbf{g} - \mathbf{v}_2\right] + \mathbf{r}_1, \quad t \in [t_1, t_2].$$

4.2.2. *Oscilatorul liniar*

4.2.2.1. Considerații generale

Vom considera oscilațiile forțate ale unui punct material A, acționat de o *forță elastică de atracție* $F(x) = -kx$, $k > 0$ (fig. 4. 4, *a*) sau de o *forță elastică repulsivă* $F(x) = kx$,



a b

Fig. 4.4.

$k > 0$ (fig. 4.4, *b*) și de o forță perturbatoare $Q(t) = mq(t)$, $t \geqslant 0$, unde m este masa punctului iar k este un coeficient elastic.

Scanned with OKEN Scanner

Folosind notaţia

$$\frac{k}{m} = \omega^2, \tag{4.2.13}$$

putem scrie ecuaţia de mişcare a unui punct material supus acţiunii unei forţe elastice de atracţie sub forma

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} x(t) + \omega^2 x(t) = q(t), \tag{4.2.14}$$

ecuaţia corespunzătoare unei forţe elastice repulsive fiind

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} x(t) - \omega^2 x(t) = q(t). \tag{4.2.14'}$$

În felul acesta se vede că operatorii $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2$ şi $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} - \omega^2$ (v. 2.1.1.4) au un sens mecanic profund şi joacă un rol important în rezolvarea problemelor oscilatorului liniar. Cu ajutorul soluţiilor fundamentale $E(t)$, putem scrie soluţia ecuaţiilor (4.2.14) şi (4.2.14') sub forma

$$x(t) = E(t) * q(t). \tag{4.2.15}$$

Dacă $q(t)$ este o funcţie integrabilă, rezultă

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} q(\tau)\, E(t - \tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

4.2.2.2. Problema Cauchy

La momentul iniţial $t = 0$ să punem condiţii de tip Cauchy, sub forma

$$\lim_{t \to +0} x(t) = x_0, \quad \lim_{t \to +0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) = v_0. \tag{4.2.16}$$

Efectuînd o prelungire cu zero pentru $t < 0$, vom introduce funcţiile

$$\bar{x}(t) = \theta(t)\, x(t), \quad \bar{q}(t) = \theta(t)\, q(t). \tag{4.2.17}$$

Scanned with OKEN Scanner

Observăm că

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\bar{x}\,(t) = \frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\,\bar{x}(t) + x_0\,\delta(t),$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,\bar{x}(t) = \frac{\tilde{\mathrm{d}}^2}{\mathrm{d}t^2}\,\bar{x}(t) + v_0\,\delta(t) + x_0\,\dot{\delta}(t).$$

Ecuaţia (4.2.14), pe care o vom considera întîi, capătă forma

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,\bar{x}(t) + \omega^2\,\bar{x}(t) = \bar{q}(t) + v_0\,\delta\,(t) + x_0\dot{\delta}(t) = f(t)\,; \tag{4.2.18}$$

scriind ecuaţia de convoluţie corespunzătoare

$$[\ddot{\delta}(t) + \omega^2\,\delta(t)] * \bar{x}(t) = f(t)$$

şi folosind rezultatele date în 2.2.1.2, rezultă

$$\bar{x}\,(t) = \frac{\theta(t)}{\omega}\,\sin\omega\,t * [\bar{q}\,(t) + v_0\,\delta(t) + x_0\,\dot{\delta}(t)],$$

de unde

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{\omega}\,\theta(t)\sin\omega\,t * \bar{q}(t) + \frac{v_0}{\omega}\,\theta(t)\sin\omega\,t + \\ + x_0\,\theta(t)\cos\omega\,t. \tag{4.2.19}$$

Dacă $q(t)$ este o funcţie local integrabilă, atunci

$$x\,(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega(t-\tau)\,q(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t + \\ + x_0\cos\omega\,t, \qquad t \geqslant 0. \tag{4.2.19'}$$

În cazul unei forţe perturbatoare sub forma unui şoc la momentul iniţial, vom avea

$$\bar{q}(t) = \delta(t), \tag{4.2.20}$$

Scanned with OKEN Scanner

ceea ce ne conduce la

$$\bar{x}(t) = \frac{1 + v_0}{\omega}\,\theta(t)\sin\omega t + x_0\,\theta(t)\cos\omega t, \qquad (4.2.21)$$

reprezentînd soluţia ecuaţiei

$$\frac{d^2}{dt^2}\,\bar{x}(t) + \omega^2\,\bar{x}(t) = (1 + v_0)\,\delta(t) + x_0\,\dot{\delta}(t); \qquad (4.2.22)$$

pentru $t > 0$, ecuaţia (4.2.22) devine

$$\frac{d^2}{dt^2}\,x(t) + \omega^2\,x(t) = 0,$$

a cărei soluţie va fi

$$x(t) = \frac{1 + v_0}{\omega}\sin\omega t + x_0\cos\omega t.$$

Observăm că această soluţie nu verifică a doua condiţie iniţială (4.2.16), deoarece şocul iniţial introduce o viteză iniţială suplimentară egală cu unitatea, astfel încît viteza iniţială devine $1 + v_0$.

Considerînd aceeaşi problemă Cauchy, ecuaţia (4.2.14′) devine

$$\frac{d^2}{dt^2}\,\bar{x}(t) - \omega^2\,\bar{x}(t) = \bar{q}(t) + v_0\,\delta(t) + x_0\,\dot{\delta}(t) = f(t); \qquad (4.2.23)$$

folosind rezultatele de la 2.2.1.2, pentru ecuaţia de convoluţie corespunzătoare

$$[\ddot{\delta}(t) + \omega^2\,\delta(t)] * \bar{x}(t) = f(t),$$

obţinem

$$\bar{x}(t) = \frac{\theta(t)}{\omega}\,\mathrm{sh}\,\omega t * [\bar{q}(t) + v_0\,\delta(t) + x_0\,\dot{\delta}(t)],$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{\omega}\theta(t)\,\mathrm{sh}\,\omega t * \bar{q}(t) + \frac{v_0}{\omega}\theta(t)\,\mathrm{sh}\,\omega t + x_0\theta(t)\,\mathrm{ch}\,\omega t. \tag{4.2.24}$$

Dacă $q(t)$ este o funcţie local integrabilă, rezultă

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t \mathrm{sh}\,\omega(t-\tau)\,q(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \frac{v_0}{\omega}\,\mathrm{sh}\,\omega t + x_0\,\mathrm{ch}\,\omega t,\ t \geqslant 0.$$

Dacă $q(t)$ este dat de (4.2.20), obţinem

$$\bar{x}(t) = \frac{1+v_0}{\omega}\,\theta(t)\,\mathrm{sh}\,\omega t + x_0\,\theta(t)\,\mathrm{ch}\,\omega t, \tag{4.2.25}$$

iar dacă avem

$$\bar{q}(t) = \ddot{\delta}(t), \tag{4.2.26}$$

rezultă

$$\bar{x}(t) = \delta(t) + \frac{1}{\omega}(\omega^2 + v_0)\,\theta(t)\,\mathrm{sh}\,\omega t + x_0\,\theta(t)\,\mathrm{ch}\,\omega t. \tag{4.2.27}$$

Şi în acest caz, putem face consideraţii asemănătoare cu cele de mai sus.

În mod analog, pentru ecuaţia (4.2.14), corespunzătoare unei forţe elastice de atracţie, putem considera o problemă bilocală, în care se pun condiţii de forma

$$x(t_1) = x_1,\ x(t_2) = x_2. \tag{4.2.28}$$

Admiţînd că $q(t)$ este o funcţie local integrabilă, plecăm de la soluţia (4.2.19′), scrisă sub forma

$$x(t) = \frac{1}{\omega}\int_{t_1}^t \sin\omega(t-\tau)\,f(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega(t-t_1) + x_0\cos\omega(t-t_1),$$

unde s-au pus condiţii de tip Cauchy la momentul iniţial t_1; punînd şi condiţia a doua (4.2.28), pentru momentul t_2, putem scrie

$$x_2 = \int_{t_1}^{t_2} \sin \omega\,(t_2 - \tau)\, f(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega(t_2 - t_1) +$$

$$+ x_0 \cos \omega\,(t_2 - t_1),$$

de unde determinăm viteza v_1 la momentul iniţial, viteză care este necunoscută. Eliminînd viteza v_1 între aceste ultime relaţii, obţinem soluţia problemei bilocale sub forma

$$x(t) = \frac{1}{\omega \sin \omega(t_2 - t_1)} \left\{ \sin \omega(t_2 - t_1) \int_{t_1}^{t} \sin \omega(t - \tau) f(\tau) \mathrm{d}\tau - \right.$$

$$- \sin \omega(t - t_1) \int_{t_1}^{t} \sin \omega(t_2 - \tau)\, f(\tau)\, \mathrm{d}\tau +$$

$$\left. + \omega\, [x_1 \sin \omega(t_2 - t) + x_2 \sin \omega(t - t_1)] \right\}. \quad (4.2.29)$$

Acest rezultat este valabil dacă $t_2 \neq t_1 + \frac{k\pi}{\omega}$, $k \in N$.

Dacă punem condiţii bilocale de forma (4.2.28) pentru ecuaţia (4.2.14′), corespunzătoare unei forţe elastice repulsive, şi procedăm în mod analog, găsim soluţia problemei sub forma

$$x(t) = \frac{1}{\omega \operatorname{sh} \omega\,(t_2 - t_1)} \left\{ \operatorname{sh} \omega(t_2 - t_1) \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{sh} \omega(t - \tau) f(\tau)\, \mathrm{d}\tau - \right.$$

$$- \operatorname{sh} \omega(t - t_1) \int_{t_1}^{t} \operatorname{sh} \omega(t_2 - \tau)\, f(\tau)\, \mathrm{d}\tau +$$

$$\left. + \omega\, [x_1 \operatorname{sh} \omega(t_2 - t) + x_2 \operatorname{sh} \omega(t - t_1)] \right\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

4.2.3. *Fire. Bare*

Corpurile care au o dimensiune (lungimea l a *axei barei*) mult mai mare decît celelalte două dimensiuni a şi b (corespunzătoare *secţiunii transversale*) se vor numi *bare*; prin urmare, este îndeplinită condiţia

$$a, b \ll l. \tag{4.2.30}$$

După forma axei, barele pot fi drepte sau curbe. În cele ce urmează vom da cîteva rezultate cu privire la *barele drepte*.

Dacă dimensiunile secţiunii transversale a barei sînt cu totul neglijabile în raport cu lungimea ei, astfel încît bara să fie *perfect flexibilă* (neputînd prelua încovoieri), obţinem un corp care poartă numele de *fir*.

4.2.3.1. Fire

Fie $\overset{\frown}{AB}$ un fir perfect flexibil şi inextensibil, fixat în punctele A şi B (fig. 4.5); arcele de curbă vor fi măsurate începînd din punctul A, admiţînd sensul pozitiv înspre punctul B. Admitem că asupra acestui fir acţionează forţe ce se exprimă prin funcţia vectorială $\mathbf{F}(s)$, continuă în raport cu arcul s peste tot, cu excepţia unui număr finit de puncte, unde are discontinuităţi de prima speţă.

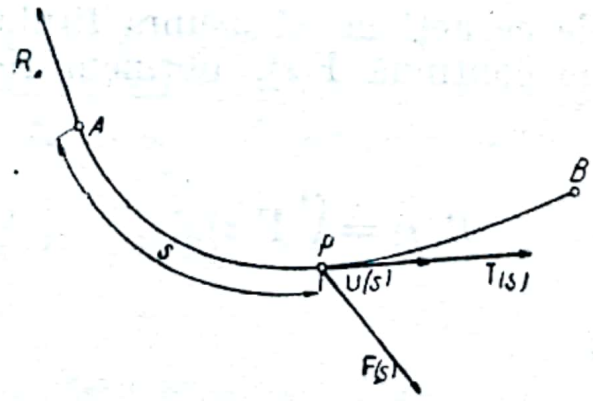


Fig. 4.5.

Pentru a stabili ecuaţiile de echilibru, suprimăm legătura din punctul A, înlocuind-o cu reacţiunea R_A, şi secţionăm firul într-un punct P, definit de arcul $\overset{\frown}{AP} = s$,

înlocuind acțiunea părții $\overset{\frown}{PB}$ asupra părții $\overset{\frown}{AP}$ prin forța **T** (tensiunea), aplicată în acest punct și îndreptată după tangenta la curba de echilibru ; putem deci scrie

$$\mathbf{u}(s) \times \mathbf{T}(s) = 0, \tag{4.2.31}$$

unde $\mathbf{u}(s)$ reprezintă versorul tangentei la curba de echilibru.

Notăm cu $\mathbf{R}(s)$ rezultanta forțelor date ce acționează asupra părții $\overset{\frown}{AP}$; în acest caz, condiția necesară de echilibru a părții $\overset{\frown}{AP}$ se scrie

$$\mathbf{R}_A + \mathbf{R}(s) + \mathbf{T}(s) = 0. \tag{4.2.32}$$

Din ipotezele făcute asupra forțelor ce acționează asupra firului, deducem că atît rezultanta $\mathbf{R}(s)$, cît și tensiunea $\mathbf{T}(s)$ sînt funcții continue, împreună cu derivata de ordinul întîi, peste tot, cu excepția unui număr finit de puncte, unde au discontinuități de speța întîi. Este important de observat că punctele de discontinuitate ale tensiunii și rezultantei sînt tocmai punctele de aplicație ale forțelor concentrate ; între punctele de discontinuitate, tensiunea $\mathbf{T}(s)$ este orientată, conform ecuației (4.2.31), după tangenta la curba de echilibru a firului.

Dacă forțele ce acționează asupra firului se exprimă printr-o funcție continuă $\mathbf{F}(s)$, obținem rezultanta $\mathbf{R}(s)$ sub forma

$$\mathbf{R}(s) = \int_0^s \mathbf{F}(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma, \tag{4.2.33}$$

echivalentă cu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbf{R}(s) = \mathbf{F}(s). \tag{4.2.33'}$$

În general, rezultanta $\mathbf{R}(s)$ nu este o funcție derivabilă peste tot, așa încît relația (4.2.33') nu poate avea loc peste tot.

Scanned with OKEN Scanner

Derivînd relaţia (4.2.32) în sensul teoriei distribuţiilor, obţinem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbf{T}(s)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbf{R}(s)=0. \tag{4.2.34}$$

Vom nota derivata în sensul teoriei distribuţiilor a rezultantei $\mathbf{R}(s)$ tot sub forma (4.2.33'), numind-o forţă generalizată pe unitatea de lungime a firului; în felul acesta, obţinem ecuaţia de echilibru a firului în distribuţii, sub forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbf{T}(s)+\mathbf{F}(s)=0. \tag{4.2.35}$$

Condiţia ca momentul în raport cu un punct arbitrar al tuturor forţelor ce acţionează asupra arcului $\overset{\frown}{AP}$ să fie nul ne conduce la ecuaţia (4.2.31). Putem scrie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbf{T}(s)=\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}s}\mathbf{T}(s)+\sum_{i=1}^{n}(\Delta\mathbf{T})_i\delta(s-s_i),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbf{R}(s)=\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}s}\mathbf{R}(s)+\sum_{i=1}^{n}(\Delta\mathbf{R})_i\delta(s-s_i),$$

unde $(\Delta\mathbf{T})_i$ şi $(\Delta\mathbf{R})_i$ reprezintă saltul tensiunii, respectiv al rezultantei, corespunzător punctului de discontinuitate $s=s_i$, $(i=1, 2, \ldots, n)$. Ecuaţia (4.2.34) capătă forma

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}s}\mathbf{T}(s)+\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}s}\mathbf{R}(s)+\sum_{i=1}^{n}[(\Delta\mathbf{T})_i+(\Delta\mathbf{R})_i]\,\delta(s-s_i)=0. \tag{4.2.36}$$

Printr-o demonstraţie analoagă cu cea de la 4.1.1.2, se poate arăta că relaţia (4.2.34) are loc dacă şi numai dacă

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}s}\mathbf{T}(s)+\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}s}\mathbf{R}(s)=0,$$

$$(\Delta\mathbf{T})_i+(\Delta\mathbf{R})_i=0, \quad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{4.2.37}$$

Scanned with OKEN Scanner

Introducînd forţa în sens obişnuit

$$\tilde{\mathbf{F}}(s) = \frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}s}\mathbf{R}(s), \qquad (4.2.33'')$$

putem scrie ecuaţia (4.2.35) sub forma

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}s}\mathbf{T}(s) + \tilde{\mathbf{F}}(s) = 0;$$

această ecuaţie se aplică pe porţiunile dintre punctele de discontinuitate ale tensiunii $\mathbf{T}(s)$.

Ecuaţia (4.2.36) ne arată că, în fiecare punct de discontinuitate, suma salturilor tensiunii şi rezultantei este egală cu zero.

Dacă un fir este acţionat în punctul de abscisă curbilinie s_0 de forţa concentrată $\mathbf{F}$, rezultanta va fi

$$\mathbf{R}(s) = \mathbf{F}\,\theta(s - s_0), \qquad (4.2.38)$$

unde am introdus distribuţia lui Heaviside; forţa generalizată pe unitatea de lungime se scrie sub forma

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{F}\delta(s - s_0), \qquad (4.2.39)$$

iar ecuaţia de echilibru a unui fir supus numai acţiunii acestei forţe concentrate devine

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbf{T}(s) + \mathbf{F}\,\delta(s - s_0) = 0. \qquad (4.2.40)$$

Dacă firul este supus acţiunii forţelor concentrate $\mathbf{F}_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, aplicate în punctele $s_1 < s_2 < \ldots < s_i < \ldots < s_n$, se obţine forma poligonală $AP_1P_2 \ldots P_i \ldots P_nB$ (fig. 4.6); ecuaţia de echilibru, scrisă în distribuţii, capătă forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbf{T}(s) + \sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i\delta(s - s_i) = 0, \qquad (4.2.41)$$

Scanned with OKEN Scanner

echivalentă cu

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}s}\mathbf{T}(s)=0, \tag{4.2.42}$$

$$(\Delta\mathbf{T})_i+\mathbf{F}_i=0. \tag{4.2.42'}$$

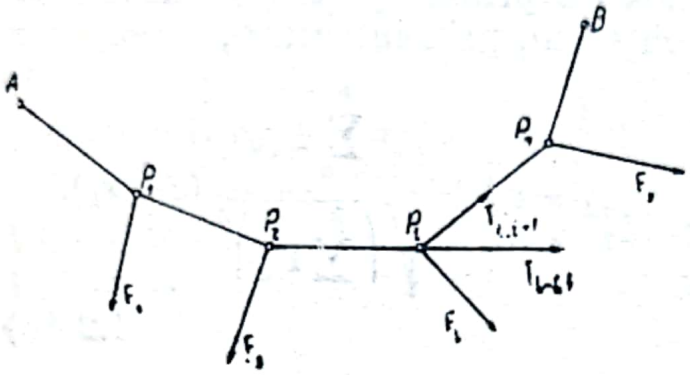


Fig. 4.6.

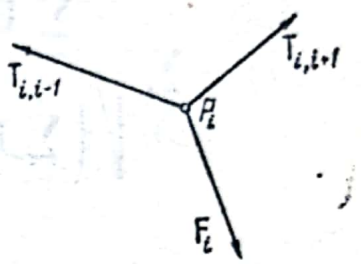


Fig. 4.7.

Ecuația (4.2.42) arată că tensiunea este constantă pe porțiuni, curba de echilibru avînd forma unei linii poligonale; pe de altă parte, observînd că

$$(\Delta\mathbf{T})_i=\mathbf{T}_{i,i+1}-\mathbf{T}_{i-1,i} \tag{4.2.43}$$

și

$$\mathbf{T}_{i-1,i}+\mathbf{T}_{i,i-1}=0,$$

rezultă că relația (4.2.42') corespunde echilibrului punctului P_i, supus acțiunii forței concentrate $\mathbf{F}_i$ și acțiunii tensiunilor $\mathbf{T}_{i,i-1}$ și $\mathbf{T}_{i,i+1}$ (fig. 4.7).

Prin integrarea ecuației (4.2.41), căpătăm

$$\mathbf{T}(s)=-\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i\theta(s-s_i)-\mathbf{R}_A, \tag{4.2.44}$$

punînd astfel în evidență tensiunea în fiecare punct al firului, cu excepția punctelor de discontinuitate; de altfel, și în aceste puncte apar salturile corespunzătoare.

Dacă $\mathbf{r}(s)$ este vectorul de poziție al unui punct al firului, atunci din ecuația (4.2.31) obținem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbf{r}(s)=-\frac{1}{T}\left[\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i\theta(s-s_i)+\mathbf{R}_A\right], \tag{4.2.45}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$T = |\mathbf{T}| = \sqrt{\left[\mathbf{R}_A + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i \theta(s - s_i)\right]^2}$$

Observînd că versorul tangentei la curba de echilibru are numai discontinuităţi de prima speţă şi considerînd originea în punctul A, obţinem, prin integrare,

$$\mathbf{r}(s) = \sum_{\substack{j=0 \\ (k \geqslant 1)}}^{k-1} \frac{\sum_{i=0}^{j} \mathbf{F}_i}{\sqrt{\left(\sum_{i=0}^{j} \mathbf{F}_i\right)^2}} (s_{j+1} - s_j) + \frac{\sum_{i=0}^{k} \mathbf{F}_i}{\sqrt{\left(\sum_{i=0}^{k} \mathbf{F}_i\right)^2}} (s - s_k), \tag{4.2.46}$$

pentru $s_k \leqslant s \leqslant s_{k+1}$, $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$, cu $s_0 = 0$ şi $s_{n+1} = l$, unde l este lungimea totală a firului; de asemenea, se consideră $\mathbf{F}_0 = \mathbf{R}_A$. În felul acesta, am obţinut ecuaţia de echilibru a firului supus acţiunii a n forţe concentrate $\mathbf{F}_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

4.2.3.2. Bare

Vom considera problema încovoierii unei bare drepte, în cadrul *ipotezelor rezistenţei materialelor* (în special al ipotezei lui J. Bernoulli a secţiunilor plane), folosind rezultatele obţinute cu privire la ecuaţiile diferenţiale ordinare. În cadrul acestor ipoteze, din punctul de vedere al deformaţiei, bara dreaptă se reduce la *fibra medie*; fibra medie deformată se mai numeşte şi *linia elastică a barei*.

Admiţînd că bara dreaptă este supusă la încovoiere datorită unei încărcări cu o sarcină normală, reprezentată printr-o distribuţie $q(x)$, şi alegînd axa barei drept axă de coordonate Ox, putem scrie ecuaţia diferenţială a liniei elastice sub forma

$$\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}x^4} v(x) = \frac{1}{EI} q(x), \tag{4.2.47}$$

unde am notat cu E modulul de elasticitate longitudinală şi cu I momentul de inerţie al secţiunii transversale în

Scanned with OKEN Scanner

raport cu *axa neutră* (care trece prin axa barei şi este normală la planul de încovoiere). Produsul EI reprezintă *rigiditatea la încovoiere* a barei. Încărcarea $q(x)$ se consideră pozitivă dacă trage de bară, iar deplasarea $v(x)$ este pozitivă dacă este îndreptată în direcţia pozitivă a axei Oy.

Observăm că sistemul fundamental normal de soluţii al ecuaţiei omogene corespunzătoare ecuaţiei (4.2.47) este

$$v_1(x) = 1,\ v_2(x) = x,\ v_3(x) = \frac{1}{2}x^2,\ v_4(x) = \frac{1}{6}x^3; \qquad (4.2.48)$$

ţinînd seama de rezultatele date în 2.3.1.1, găsim soluţia particulară fundamentală $E_+(x)$ sub forma

$$E_+(x) = \frac{1}{EI}v_{4+}(x) = \frac{1}{6EI}\theta(x)\,x^3 = \frac{1}{6EI}x_+^3. \qquad (4.2.49)$$

Soluţia generală a ecuaţiei (4.2.47) se va exprima, în acest caz, prin relaţia

$$v(x) = \frac{1}{EI}\left[C_1 + C_2x + \frac{1}{2}C_3x^2 + \frac{1}{6}C_4x^3 + \frac{1}{6}x_+^3 * q(x)\right], \qquad (4.2.50)$$

unde constantele C_1, C_2, C_3, C_4 vor fi precizate prin *condiţiile de fixitate* (*de rezemare*) ale barei. Putem scrie ecuaţia liniei elastice şi sub forma

$$v(x) = \frac{1}{EI}\left(A_1 + A_2x + \frac{1}{2}A_3x^2 + \frac{1}{6}A_4x^3 + \frac{1}{6}x_+^3\right) * q(x) = \\ = v_0(x) * q(x), \qquad (4.2.50')$$

unde A_1, A_2, A_3, A_4 sînt alte constante, ce se determină pe aceeaşi cale.

Fie, de exemplu, o bară dreaptă OA, de lungime l (fig. 4.8), încastrată în punctul O şi avînd celălalt capăt liber (o *consolă*); admitem că la capătul liber acţionează forţa concentrată P. Sarcina echivalentă va fi

$$q(x) = -P\,\delta(x - l), \qquad (4.2.51)$$

Scanned with OKEN Scanner

astfel încît ecuaţia liniei elastice se va exprima sub forma

$$v(x) = \frac{1}{EI}\left[C_1 + C_2 x + \frac{1}{2} C_3 x^2 + \frac{1}{6} C_4 x^3 - \right.$$
$$\left. - \frac{P}{6}(x-l)_+^3 \right], \quad x \in [0, \infty). \qquad (4.2.52)$$

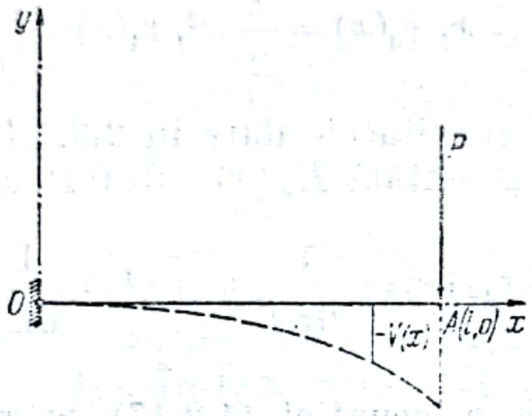


Fig. 4.8.

Observăm că ecuaţia (4.2.52) mai poate fi scrisă şi sub forma

$$v(x) = -\frac{P}{EI}\left[A_1 + A_2(x-l) + \frac{1}{2} A_3 (x-l)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{6} A_4 (x-l)^3 + \frac{1}{6}(x-l)_+^3 \right],$$

constantele de integrare fiind precizate prin *condiţiile de încastrare* (condiţii de tip Cauchy)

$$x = 0: \quad v(x) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} v(x) = 0 \qquad (4.2.53)$$

şi prin condiţiile privitoare la *momentul încovoietor* şi *forţa tăietoare* în aceeaşi secţiune de încastrare (tot condiţii de tip Cauchy)

$$x = 0: \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} v(x) = -\frac{Pl}{EI}, \quad \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3} v(x) = \frac{P}{EI}.$$

Scanned with OKEN Scanner

În felul acesta, obținem constantele

$$A_1 = \frac{1}{3}a^3,\ A_2 = \frac{1}{2}a^2,\ A_3 = 0,\ A_4 = -1,$$

c eea ce ne conduce la

$$v(x) = -\frac{P}{6EI}x^2(3l - x),\ x \in [0, l]. \qquad (4.2.54)$$

Dacă asupra barei acționează o forță concentrată P, în punctul A, care se exprimă sub forma $q(x) = Q_A(x)$, și dacă folosim ecuația liniei elastice (4.2.50′), reprezentarea (3.2.14) se scrie

$$v(x) = v_0(x) * \left[Q_0(x) + Q^{(1)}(x) + \frac{1}{2}Q^{(2)}(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6}Q^{(3)}(x) \right],\ x \in [0, l], \qquad (4.2.55)$$

deoarece

$$v_0(x) * Q^{(i)}(x) = 0,\ i \geqslant 4. \qquad (4.2.56)$$

Deci ordinul maxim al momentelor concentrate dirijate va fi, în acest caz, $n = 3$.

În cazul *vibrațiilor transversale libere* (*vibrații proprii*) ale unei bare drepte de lungime infinită se pun de asemenea condiții inițiale de tip Cauchy. Admițînd că se ia axa Ox după direcția axei barei de lungime infinită, ecuația diferențială a vibrațiilor transversale proprii ale barei în planul Oxy se scrie

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4}v(x; t) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}v(x; t) = 0,\ t > 0, \qquad (4.2.57)$$

unde viteza de propagare a undelor este dată de

$$c = \sqrt{\frac{EI}{\rho}}, \qquad (4.2.58)$$

EI fiind rigiditatea la încovoiere, iar ρ masa specifică.

Scanned with OKEN Scanner

Impunem condiţiile iniţiale

$$\lim_{t\to+0} v(x;t)=f_1(x),\ \lim_{t\to+0}\frac{\partial}{\partial t}v(x;t)=g(x)=c\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f_2(x), \tag{4.2.59}$$

derivarea efectuîndu-se în sensul teoriei distribuţiilor, iar $f_1(x)$ şi $f_2(x)$ fiind distribuţii date.

Pentru a înlocui ecuaţia diferenţială (4.2.57) printr-o ecuaţie diferenţială în distribuţii, vom introduce deplasarea generalizată

$$\bar{v}(x;t)=\theta(t)\,v(x;t), \tag{4.2.60}$$

printr-o prelungire la stînga cu valori nule; la momentul $t=0$ apare o discontinuitate de speţa întîi. Putem scrie

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{v}(x;t)=\frac{\widetilde{\partial}}{\partial t}\bar{v}(x;t)+f_1(x)\,\delta(t),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{v}(x;t)=\frac{\widetilde{\partial}^2}{\partial t^2}\bar{v}(x;t)+c\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f_2(x)\delta(t)+f_1(x)\dot{\delta}(t),$$

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4}\bar{v}(x;t)=\frac{\widetilde{\partial}^4}{\partial x^4}\bar{v}(x;t),$$

astfel încît ecuaţia diferenţială (4.2.57) capătă forma modificată

$$c^2\frac{\partial^4}{\partial x^4}\bar{v}(x;t)+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{v}(x;t))=c\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f_2(x)\,\delta(t)+f_1(x)\,\dot{\delta}(t), \tag{4.2.57'}$$

care înglobează şi condiţiile iniţiale, fiind scrisă în distribuţii.

Menţionăm că această metodologie se poate aplica şi la alte ecuaţii de mişcare de o formă analoagă.

Pentru a găsi soluţia ecuaţiei (4.2.57'), aplicăm transformata Laplace în raport cu variabila temporală şi transformata Fourier în raport cu variabila spaţială. Obţinem

$$c^2(-\mathrm{i}\alpha)^4F[L[\bar{v}(x;t)]]+p^2F[L[\bar{v}(x;t)]]=$$
$$=-\alpha^2cF[f_2(x)]+pF[f_1(x)],$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde

$$F[L[\bar{v}(x\,;t)]]=\frac{p}{p^2+\alpha^4 c^2}F[f_1(x)]-\frac{\alpha^2 c}{p^2+\alpha^4 c^2}F[f_2(x)]. \tag{4.2.61}$$

Aplicînd transformata Laplace inversă şi ţinînd seama de formulele (1.6.55), (1.6.55'), putem scrie

$$F[\bar{v}(x\,;t)]=F[f_1(x)]\cos(\alpha^2 c\,t)-F[f_2(x)]\sin(\alpha^2 ct).$$

Prin aplicarea transformatei Fourier inverse asupra acestei din urmă relaţii, găsim

$$\bar{v}(x\,;t)=F^{-1}[F[f_1(x)]\cos(\alpha^2 ct)]-F^{-1}[F[f_2(x)\sin(\alpha^2 ct)].$$

Observînd că

$$F\left[\cos\frac{x^2}{4ct}+\sin\frac{x^2}{4ct}\right]=2\sqrt{2\pi ct}\cos(\alpha^2 ct),$$

$$F\left[\cos\frac{x^2}{4ct}-\sin\frac{x^2}{4ct}\right]=2\sqrt{2\pi ct}\sin(\alpha^2 ct)$$

şi ţinînd seama de formula (1.5.25) privitoare la transformata Fourier a unui produs de convoluţie, în cazul în care unul din factori este o distribuţie temperată, iar celălalt factor este o distribuţie cu suport mărginit, putem scrie soluţia problemei sub forma

$$\bar{v}(x\,;t)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi ct}}\left[f_1(x)*\left(\cos\frac{x^2}{4ct}+\sin\frac{x^2}{4ct}\right)-\right.$$
$$\left.-f_2(x)*\left(\cos\frac{x^2}{4ct}-\sin\frac{x^2}{4ct}\right)\right]. \tag{4.2.62}$$

4.3. Probleme la limită ale teoriei elasticităţii

4.3.1. *Probleme statice ale corpurilor liniar elastice*

Pentru a putea construi modelul matematic al problemei statice a unui corp liniar elastic, vom considera unele aspecte de *geometria deformaţiei* şi *mecanica tensiunilor*,

Scanned with OKEN Scanner

precum și *legea constitutivă* a lui Hooke. În cadrul modelului matematic al mecanicii newtoniene vom face cîteva ipoteze fundamentale și anume :

a) Corpul solid pe care-l studiem (considerat în repaus față de un reper presupus fix) este supus acțiunii unor *sarcini exterioare în echilibru* (sistem de sarcini echivalent cu zero).

b) Corpul solid este considerat un *mediu continuu* (fără goluri, fără fisuri interioare microscopice etc.). Admitem, în felul acesta, că și deformarea corpului se va produce în mod continuu, deci deformațiile și tensiunile se vor reprezenta matematic prin funcții care sînt cel puțin continue. Pentru unele puncte ale corpului (puncte singulare), în care deformațiile și tensiunile tind către infinit, se face un studiu suplimentar; dealtfel, introducerea distribuțiilor elimină asemenea puncte. De asemenea, cazul corpurilor cu goluri interioare (corpuri continue, cărora le corespund *domenii multiplu conexe*) și cazul corpurilor cu tăieturi interioare (cazuri particulare de conexiune multiplă) trebuie considerate separat.

c) Corpul solid pe care-l studiem *nu are tensiuni inițiale*, care pot fi datorate unor deformații inițiale ale materialului; în felul acesta, se admite că unui corp neîncărcat (cazul sarcinilor exterioare nule) îi corespunde o stare de tensiune nulă.

4.3.1.1. Formularea în deplasări a problemei spațiale a teoriei elasticității

Sub acțiunea sarcinilor exterioare, particulele care alcătuiesc un corp solid își schimbă poziția (față de un reper considerat fix) pe care o aveau înainte de acțiunea acestor sarcini. Dacă, printr-o mișcare de translație și o mișcare de rotație, putem face ca aceste particule ale corpului supus acțiunii sarcinilor exterioare să capete poziția pe care o aveau înainte de acțiunea acestor sarcini, spunem că avem o *mișcare de corp rigid*; în caz contrar, corpul suferă o *deformație*. Totalitatea deformațiilor pe care le suferă o particulă din corp alcătuiește starea de deformație într-un punct (centrul de masă al particulei). Totalitatea stărilor de deformație corespunzătoare tuturor punctelor

Scanned with OKEN Scanner

(particulelor) corpului solid constituie *starea de deformaţie* a acestuia.

Introducînd şi noţiunea de *deplasare a unui punct*, observăm că totalitatea deplasărilor corespunzătoare tuturor punctelor corpului solid constituie *starea de deplasare* a corpului.

Corpurile care suferă numai deplasări de corp rigid se numesc *solide rigide*; celelalte corpuri solide se numesc *solide deformabile*. În cele ce urmează, admitem că avem deformaţii şi rotaţii (corespunzătoare *gradientului deplasării*) neglijabile în raport cu unitatea.

Datorită deformaţiilor, echilibrul forţelor de legătură dintre diferitele particule ale corpului se strică, luînd naştere forţe interioare suplimentare, raportate la unitatea de arie (numite *tensiuni*). Totalitatea tensiunilor corespunzătoare unei particule alcătuieşte starea de tensiune într-un punct; totalitatea stărilor de tensiune corespunzătoare tuturor punctelor corpului solid constituie *starea de tensiune* a corpului.

Starea de deformaţie şi starea de tensiune a unui corp formează *starea de solicitare* a acelui corp.

Legea constitutivă a unui solid deformabil ne permite să punem în evidenţă proprietăţile de ordin fizic ale materialului; din punct de vedere matematic, o asemenea lege ne dă relaţiile care există între deformaţii şi tensiuni. În cele ce urmează, vom face următoarele ipoteze simplificatoare, care determină legea constitutivă pe care o vom folosi (corespunzătoare corpurilor liniar elastice):

a) Corpul solid este *izotrop*, adică are aceleaşi proprietăţi mecanice (şi fizice) pe orice direcţie în vecinătatea fiecărui punct al său.

b) Corpul solid este *omogen*, adică are aceleaşi proprietăţi mecanice (şi fizice) în fiecare punct al său. În baza acestei proprietăţi, coeficienţii mecanici ai materialului care intervin în legea constitutivă sînt constanţi în raport cu variabilele spaţiale.

c) Corpul pe care-l studiem este *perfect elastic*. Sub acţiunea sarcinilor exterioare, corpul se deformează, iar dacă acţiunea acestor sarcini încetează să se mai exercite, el îşi revine la poziţia iniţială şi la forma iniţială (fără a se produce vreun fenomen de *histerezis*); fenomenul de defor-

Scanned with OKEN Scanner

mare este *reversibil*. Deci forma deformată a unui corp solid perfect elastic va fi influențată numai de sarcinile exterioare ce acționează în acel moment asupra sa. Între tensiuni și deformații va exista o legătură biunivocă; astfel, starea de tensiune într-un punct al corpului solid va depinde numai de starea de deformație din vecinătatea acelui punct. În acest fel, ne situăm în cadrul teoriei elasticității. Vom folosi astfel ca lege constitutivă o relație liniară (legea lui Hooke). Această ipoteză corespunde adesea suficient de bine fenomenului fizic, conducînd pe de altă parte la simplificări importante în calculul matematic.

Ținînd seama de considerațiile făcute, putem trece la construirea modelului matematic al unui corp liniar elastic, omogen și izotrop, supus la deformații și rotații infinitezimale.

Starea de deformație este caracterizată prin *tensorul deformație specifică* de componente $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3)$, $(i, j = 1, 2, 3)$; acest tensor este *simetric* ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$). Dacă $i = j$, obținem *deformațiile specifice liniare*: cazul $i \neq j$ corespunde *deformațiilor specifice unghiulare* $\gamma_{ij} = 2\,\varepsilon_{ij}$. Starea de deplasare este dată de *vectorul deplasare* $\mathbf{u}$, de componente $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$, $(i = 1, 2, 3)$.

În cazul liniar considerat, între componentele tensorului deformație specifică și componentele vectorului deplasare există *relațiile lui Cauchy*

$$\varepsilon_{ij} = u_{(i,j)} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \qquad (i, j = 1, 2, 3), \quad (4.3.1)$$

unde indicele la dreapta virgulei indică derivarea în raport cu variabila corespunzătoare, luîndu-se partea simetrică a tensorului în raport cu indicii cuprinși între paranteze.

Ecuațiile (4.3.1), privite ca un sistem de șase ecuații în funcțiile necunoscute u_i, $(i = 1, 2, 3)$, trebuie să fie compatibile între ele. Condițiile de compatibilitate ale acestui sistem, care sînt în același timp și *condiții de continuitate a deformației*, au fost date de B. de Saint-Venant sub forma (sumare în raport cu indicii muți)

$$\in_{mij} \in_{nkl} \varepsilon_{ik,jl} = 0, \quad (m, n = 1, 2, 3), \qquad (4.3.2)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde ϵ_{ijk} sînt componentele tensorului total antisimetric de permutare al lui T. Levi-Civita [egale cu 1 dacă indicii (i, j, k) sînt o permutare a lui $(1, 2, 3)$, egale cu (-1) dacă indicii (i, j, k) sînt o permutare a lui (2,1,3) şi egale cu zero dacă doi indici sînt egali]; putem scrie astfel şase ecuaţii distincte. Aceste condiţii sînt necesare şi suficiente în cazul corpurilor solide ce ocupă un domeniu simplu conex, dar sînt numai necesare în cazul corpurilor solide care ocupă un domeniu multiplu conex.

În acest caz, putem integra sistemul de ecuaţii (4.3.1); starea de deplasare într-un punct $P(x_1, x_2, x_3)$ va fi astfel dată de *formulele lui Cesàro*

$$u_i = u_i^0 - \epsilon_{ijk}\,(x_j - x_j^0)\,\omega_k^0 + \int_{\overset{\frown}{P^0P}} [\varepsilon_{ik}\,(\xi_1, \xi_2, \xi_3) +$$

$$+ (x_j - \xi_j)\,\epsilon_{k\,[i,j]}\,(\xi_1, \xi_2, \xi_3)]\,\mathrm{d}\,\xi_k, \quad (i = 1, 2, 3), \qquad (4.3.3)$$

unde parantezele drepte corespund părţii antisimetrice a tensorului în raport cu indicii cuprinşi între acestea, iar u_i^0, ω_i^0, $(i = 1, 2, 3)$, reprezintă deplasările, respectiv rotaţiile corespunzătoare *mişcării de corp rigid a solidului*

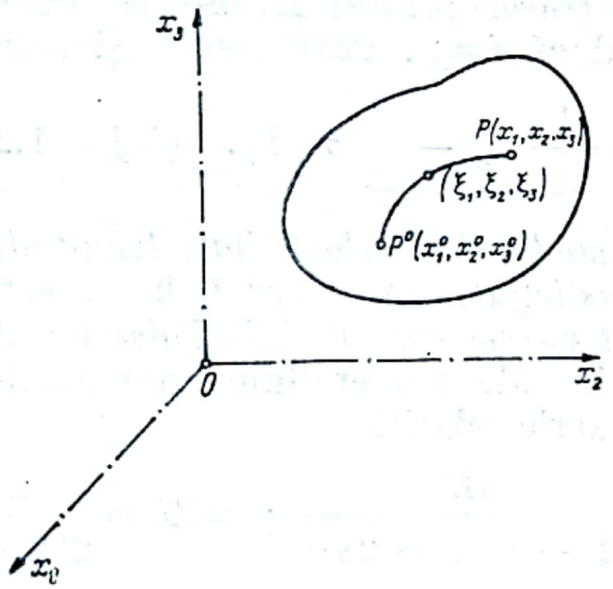


Fig. 4.9.

deformabil, scrise pentru punctul $P^0\,(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$. Această formulă este valabilă pentru un corp care ocupă un domeniu simplu conex (fig. 4.9).

Scanned with OKEN Scanner

Observăm că deplasările trebuie să fie funcţii de clasa C^3, pe cînd deformaţiile specifice este suficient să fie funcţii de clasa C^2.

Starea de tensiune este caracterizată de *tensorul tensiune*, de componente $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$, $(i, j = 1, 2, 3)$; acest tensor este simetric $(\sigma_{ij} = \sigma_{ji})$. Dacă $i = j$, obţinem *tensiunile normale*, iar dacă $i \neq j$, *tensiunile tangenţiale*. Componentele acestui tensor verifică *ecuaţiile de echilibru*

$$\sigma_{ji,j} + F_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3), \tag{4.3.4}$$

unde $F_i = F_i(x_1, x_2, x_3)$ sînt componentele *forţei volumice*; observăm că aceste componente trebuie să fie funcţii continue. Tensiunile trebuie să fie funcţii de clasa C^1; ţinînd seama de legea constitutivă a unui corp liniar elastic — de exemplu — rezultă că aceste funcţii trebuie să fie de clasa C^2.

Legea lui Hooke, pe care o vom folosi drept lege constitutivă, se scrie sub forma

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{ll}\, \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3), \tag{4.3.5}$$

unde λ şi μ sînt *constantele elastice ale lui Lamé*, iar δ_{ij} sînt componentele *tensorului lui Kronecker* (egale cu 1 dacă $i = j$ şi nule dacă $i \neq j$). Putem scrie şi relaţiile

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{ll}\,\delta_{ij}, \quad (i, j = 1,2,3),$$

unde E este *modulul de elasticitate longitudinală*, G este *modulul de elasticitate transversală*, iar ν este *coeficientul de contracţie transversală al lui Poisson*; dintre aceste *constante tehnice* ale materialului numai două sînt distincte, putînd scrie relaţiile

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \tag{4.3.6}$$

Condiţiile la limită vor fi *condiţii pe contur*. În cazul *primei probleme fundamentale* (fig. 4.10), aceste condiţii se pun în deplasări, sub forma

$$u_i = \overset{n}{u}_i, \quad (i = 1, 2, 3), \tag{4.3.7}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\overset{n}{u}_i$ sînt deplasările corespunzătoare unui punct de pe contur, de normală exterioară **n**. În cazul celei de-a *doua probleme fundamentale* se pun condiţii pe contur în tensiuni, sub forma

$$\sigma_{ji}\, n_j = \overset{n}{p}_i, \quad (i = 1, 2, 3), \tag{4.3.7'}$$

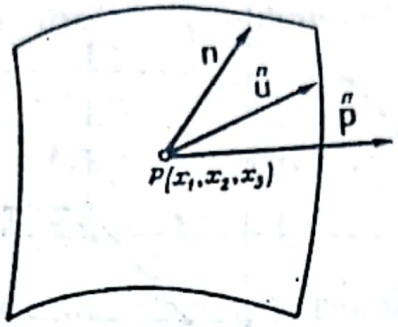


Fig. 4.10.

unde $\overset{n}{p}_i$ sînt componentele sarcinii exterioare superficiale, ce acţionează pe elementul de arie de normală exterioară **n**. În cazul unei *probleme mixte*, se pun condiţii în deplasări pe o porţiune de contur şi condiţii în tensiuni pe restul conturului.

Sistemul de ecuaţii (4.3.1), (4.3.4) şi (4.3.5) formează un sistem de 15 ecuaţii cu 15 funcţii necunoscute, care reprezintă *sistemul fundamental de ecuaţii diferenţiale ale elastostaticii*. Se demonstrează că acest sistem de ecuaţii admite totdeauna o soluţie, care este unică pentru condiţiile la limită date.

Într-o *formulare în deplasări* a problemelor teoriei elasticităţii, va trebui să eliminăm tensiunile şi deformaţiile specifice între ecuaţiile sistemului fundamental de ecuaţii ; găsim astfel *sistemul* de ecuaţii al *lui Lamé*

$$\mu \Delta u_i + (\lambda + \mu)\, u_{j,ji} + F_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3), \tag{4.3.8}$$

care se scrie vectorial sub forma

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu)\, \text{grad div}\, \mathbf{u} + \mathbf{F} = 0.$$

4.3.1.2. Spaţiul elastic. Soluţii fundamentale

Vom considera *spaţiul elastic* supus acţiunii unei forţe volumice F_i, exprimată în distribuţii (fig. 4.11). Starea de deplasare va fi dată de ecuaţiile lui Lamé (4.3.8), în care

Scanned with OKEN Scanner

operaţiile se vor considera în sensul teoriei distribuţiilor. Soluţiile acestui sistem de ecuaţii vor trebui să verifice anumite *condiţii de regularitate* la infinit; astfel, dacă $R = \sqrt{x_i x_i}$ este raza vectoare, va trebui ca componentele

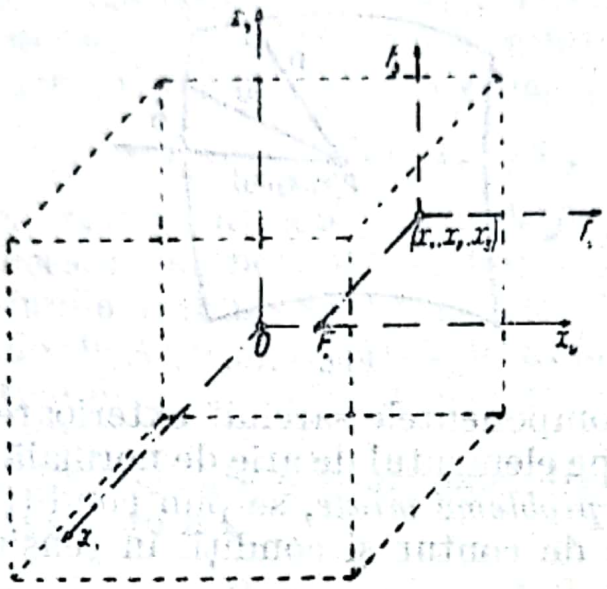


Fig. 4.11.

vectorului deplasare să tindă către zero, pentru $R \to \infty$.

Tensorul de componente $u_{ij} = u_{ij}(x_1, x_2, x_3)$, $(i, j = 1, 2, 3)$, se va numi *tensorul soluţie fundamentală* corespunzător spaţiului elastic, dacă aceste componente satisfac sistemul de ecuaţii

$$\mu \Delta u_{ij} + (\lambda + \mu) u_{kj,ki} + \delta_{ij}\, \delta(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3), \tag{4.3.9}$$

unde $\delta(x_1, x_2, x_3)$ este distribuţia lui Dirac. De asemenea, trebuie verificate condiţiile la limită

$$\lim_{R \to \infty} u_{ij} = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3). \tag{4.3.10}$$

Prin aplicarea transformatei Fourier, găsim sistemul de ecuaţii algebrice liniare

$$\mu \alpha_k \alpha_k F[u_{ij}] + (\lambda + \mu)\, \alpha_i \alpha_k F[u_{kj}] = \delta_{ij},$$

unde α_i, $(i = 1, 2, 3)$, sînt variabile complexe; înmulțind cu α_i și sumînd, rezultă

$$\alpha_j F[u_{ji}] = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \frac{\alpha_i}{\alpha_k \alpha_k}.$$

Găsim astfel transformatele Fourier sub forma

$$F[u_{ij}] = -\frac{\lambda + \mu}{\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{\alpha_i \alpha_j}{(\alpha_k \alpha_k)^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\delta_{ij}}{\alpha_k \alpha_k},$$
$$(i, j = 1, 2, 3). \qquad (4.3.11)$$

Ținînd seama de formula (1.6.44), rezultă

$$F\left[\frac{1}{R}\right] = \frac{4\pi}{\alpha_k \alpha_k}; \qquad (4.3.12)$$

formula (1.6.44′) ne permite să scriem

$$F\left[\frac{x_j}{R}\right] = 8\pi i \frac{\alpha_j}{(\alpha_k \alpha_k)^2}, \quad (j=1, 2, 3).$$

De asemenea

$$\delta_{ij} F\left[\frac{1}{R}\right] - F\left[\frac{x_i x_j}{R^3}\right] = 8\pi \frac{\alpha_i \alpha_j}{(\alpha_k \alpha_k)^2}, \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Plecînd de la (4.3.6), putem scrie

$$\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{1}{2(1 - \nu)}, \quad \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{3 - 4\nu}{2(1 - \nu)},$$

de unde rezultă

$$u_{ij}(x_1, x_2 x_3) = \frac{1}{16\pi(1 - \nu) G} \frac{1}{R} \left[(3 - 4\nu)\, \delta_{ij} + \frac{x_i x_j}{R^2}\right],$$
$$(i, j = 1, 2, 3). \qquad (4.3.13)$$

Folosind relațiile lui Cauchy (4.3.1), legea lui Hooke (4.3.5) și relațiile (4.3.6), putem introduce un *tensor soluție*

Scanned with OKEN Scanner

fundamentală de ordinul al treilea, *corespunzător unei formulări în tensiuni* a problemei. Găsim astfel

$$v_{ijk}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{R^3}\left[(1-2\nu)(x_k\delta_{ij} - x_i\delta_{jk} - x_j\delta_{ki}) - 3\frac{x_i\, x_j\, x_k}{R^2}\right], \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \tag{4.3.14}$$

În acest caz, starea de deplasare va fi

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_{ij}(x_1, x_2, x_3) * F_j(x_1, x_2\, x_3), \quad (i = 1, 2, 3), \tag{4.3.15}$$

iar starea de tensiune se va scrie sub forma

$$\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3) = v_{ijk}(x_1, x_2, x_3) * F_k(x_1, x_2, x_3), \quad (i, j = 1, 2, 3), \tag{4.3.16}$$

unde am introdus produsul de convoluţie în raport cu variabilele spaţiale.

În cazul spaţiului elastic supus acţiunii unei *forţe concentrate* **P** în punctul $A(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, introducem sarcina echivalentă de componente

$$F_i(x_1, x_2, x_3) = P_i\delta(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0), \quad (i = 1, 2, 3), \tag{4.3.17}$$

unde am ţinut seama de formula (3.2.1).

Formula (4.3.15) ne dă starea de deplasare

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = P_j u_{ij}(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0), \quad (i = 1, 2, 3), \tag{4.3.18}$$

iar formula (4.3.16) ne permite să scriem starea de tensiune sub forma

$$\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3) = P_k v_{ijk}(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0), \quad (i, j = 1, 2, 3). \tag{4.3.18'}$$

Scanned with OKEN Scanner

În particular, dacă forța **P** este aplicată în origine, rezultă

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)G}\frac{1}{R}\left[(3-4\nu)P_i + P_j\frac{x_i x_j}{R^2}\right],$$

$$(i = 1, 2, 3) \qquad (4.3.19)$$

și

$$\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)}\frac{1}{R^3}\left[(1-2\nu)(x_k P_k \delta_{ij} - \right.$$

$$\left. - x_i P_j - x_j P_i) - 3P_k\frac{x_i x_j x_k}{R^3}\right] =$$

$$= \frac{1}{8\pi(1-\nu)}\frac{1}{R^3}\left\{x_k P_k\left[(1-2\nu)\delta_{ij} - 3\frac{x_i x_j}{R^2}\right] - \right.$$

$$\left. - 2(1-2\nu)x_{(i}P_{j)}\right\}, \quad (i, j = 1, 2, 3). \qquad (4.3.19')$$

Folosind rezultatele de la 3.2.1, putem considera și alte cazuri de încărcare cu momente concentrate. De exemplu, fie spațiul elastic acționat în punctul $A(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ de un *moment concentrat dirijat* de mărime M, precizat de versorii **u** și $\mathbf{F}^0$; sarcina echivalentă se scrie

$$F_i(x_1, x_2, x_3) = -\frac{MF_i^0}{|\mathbf{u}\times\mathbf{F}^0|}\frac{\partial}{\partial u}\delta(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0),$$

$$(i = 1, 2, 3). \qquad (4.3.20)$$

Starea de deplasare va fi

$$u_i(x_1, x_2, x_3) =$$

$$= -\frac{M}{|\mathbf{u}\times\mathbf{F}^0|}F_j^0\frac{\partial}{\partial u}u_{ij}(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0) =$$

$$= -\frac{M}{|\mathbf{u}\times\mathbf{F}^0|}\frac{\partial}{\partial u}u_i^{\mathbf{F}^0}, \quad (i = 1, 2, 3), \qquad (4.3.21)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde u_i sînt deplasările corespunzătoare acţiunii unei forţe concentrate $\mathbf{F}^0$, de mărime egală cu unitatea, conform formulelor (4.3.18).

În particular, dacă momentul concentrat dirijat este aplicat în origine şi luăm $\mathbf{F}^0 = -\mathbf{i}_1, \mathbf{u} = \mathbf{i}_2$, unde $\mathbf{i}_j$, $(j = 1, 2, 3)$, sînt versorii axelor de coordonate, rezultă

$$F_1(x_1, x_2, x_3) = M \frac{\partial}{\partial x_2} \delta(x_1, x_2, x_3),$$
$$F_2(x_1, x_2, x_3) = F_3(x_1, x_2, x_3) = 0, \tag{4.3.22}$$

starea de deplasare scriindu-se sub forma

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = M \frac{\partial}{\partial x_2} u_{11}(x_1, x_2, x_3) =$$
$$= -\frac{M}{16\pi(1-\nu)G} \frac{x_2}{R^3}\left(3 - 4\nu + 3\frac{x_1^2}{R^2}\right),$$
$$u_2(x_1, x_2, x_3) = M \frac{\partial}{\partial x_2} u_{21}(x_1, x_2, x_3) =$$
$$= \frac{M}{16\pi(1-\nu)G} \frac{x_1}{R^3}\left(1 - 3\frac{x_2^2}{R^2}\right), \tag{4.3.23}$$
$$u_3(x_1, x_2, x_3) = M \frac{\partial}{\partial x_2} u_{31}(x_1, x_2, x_3) =$$
$$= -\frac{3M}{16\pi(1-\nu)G} \frac{x_1 x_2 x_3}{R^5}.$$

În cazul spaţiului elastic acţionat în punctul $A(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ de un *moment concentrat rotaţional* (*centru de rotaţie*) de mărime M, precizat de versorul $\mathbf{n}$, de componente n_i, $(i = 1, 2, 3)$, introducem sarcina echivalentă

$$F_i(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{2} M \in_{ijk} n_j \delta_{,k}(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0),$$
$$(i = 1, 2, 3). \tag{4.3.24}$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă starea de deplasare

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{2} M \in_{jkl} n_k u_{ij,l}(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0),$$
$$(i = 1, 2, 3). \tag{4.3.25}$$

În particular, dacă $\mathbf{n} = \mathbf{i}_3$, obținem un moment concentrat rotațional aplicat în origine, care produce o rotație pozitivă în planul Ox_1x_2; acestui moment îi corespunde sarcina echivalentă

$$F_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} M \frac{\partial}{\partial x_2} \delta(x_1, x_2, x_3),$$
$$F_2(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{2} M \frac{\partial}{\partial x_1} \delta(x_1, x_2, x_3), \quad F_3(x_1, x_2, x_3) = 0, \tag{4.3.26}$$

starea de deplasare fiind dată de

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} M \left[\frac{\partial}{\partial x_2} u_{11}(x_1, x_2, x_3) - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial}{\partial x_1} u_{12}(x_1, x_2, x_3) \right] = -\frac{M}{8\pi G} \frac{x_2}{R^3},$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} M \left[\frac{\partial}{\partial x_2} u_{21}(x_1, x_2, x_3) - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial}{\partial x_1} u_{22}(x_1, x_2, x_3) \right] = \frac{M}{8\pi G} \frac{x_1}{R^3}, \tag{4.3.27}$$

$$u(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} M \left[\frac{\partial}{\partial x_2} u_{31}(x_1, x_2, x_3) - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial}{\partial x_1} u_{32}(x_1, x_2, x_3) \right] = 0.$$

Putem studia, în mod analog, și alte cazuri de încărcare.

Scanned with OKEN Scanner

În construirea modelului matematic al problemei dinamice a unui corp liniar elastic, vom considera unele aspecte de *cinematica deformației* și mecanica tensiunilor, a care se adaugă legea constitutivă a lui Hooke. Ipotezele fundamentale trebuie completate, în sensul introducerii forțelor de inerție, corpul considerat fiind în mișcare; în acest caz, sarcinile exterioare sînt în *echilibru dinamic*.

4.3.2.1. Formularea în deplasări a problemei spațiale a teoriei elasticității

În ceea ce privește starea de deformație și starea de deplasare rămîn în continuare valabile ipotezele făcute în 4.3.1.1 și relațiile (4.3.1) — (4.3.3); observăm numai că mărimile introduse vor depinde explicit și de variabila temporală, astfel încît $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3; t)$ și $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3; t)$, $(i, j = 1, 2, 3)$.

Pentru componentele $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3; t)$ vom scrie *ecuațiile de mișcare*

$$\sigma_{ji,j} + F_i = \rho \ddot{u}_i, \tag{4.3.28}$$

unde $F_i = F_i(x_1, x_2, x_3; t)$, iar ρ este masa specifică; am admis *ipoteza micilor mișcări*. În cazul unei *amortizări* proporționale cu viteza de deplasare, se înlocuiește operatorul diferențial $\rho \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ cu operatorul $\rho \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + k \dfrac{\partial}{\partial t}$, unde k este un coeficient de amortizare.

În ceea ce privește ipotezele simplificatoare legate de legea constitutivă, vom adăuga o ipoteză suplimentară:

d) Nu se ține seama de viteza de deformare a corpului solid. Legea constitutivă se va scrie sub aceeași formă, relațiile (4.3.5) — (4.3.6) rămînînd în continuare valabile.

Condițiile la limită vor fi *condiții pe contur* și *condiții inițiale*. Condițiile pe contur se pun tot sub forma (4.3.7) sau (4.3.7′), observînd că ele trebuie să fie îndeplinite pentru $t \geqslant t_0$, unde t_0 este momentul inițial. La momentul inițial $t = t_0$ vom pune condițiile

$$\begin{aligned} u_i(x_1, x_2, x_3; t_0) &= u_i^0(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{u}_i(x_1, x_2, x_3; t_0) &= \dot{u}_i^0(x_1, x_2, x_3) \end{aligned} \tag{4.3.29}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau condiţiile

$$\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3 ; t_0) = \sigma^0_{ij}(x_1, x_2, x_3),$$

$$\dot{\sigma}_{ij}(x_1, x_2, x_3 ; t_0) = \dot{\sigma}^0_{ij}(x_1, x_2, x_3).$$

Sistemul de ecuaţii (4.3.1), (4.3.5) şi (4.3.28) formează *sistemul fundamental de ecuaţii diferenţiale al elastodinamicii.* Se poate demonstra că acest sistem de 15 ecuaţii cu 15 funcţii necunoscute admite totdeauna o soluţie, care este unică în condiţiile la limită date.

Într-o formulare în deplasări, obţinem *ecuaţiile lui Lamé* sub forma

$$\mu \Box_2 u_i + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + F_i = 0, \ (i = 1, 2, 3), \quad (4.3.30)$$

unde $\Box_2$ este operatorul lui d'Alembert definit de relaţia (2.3.37′); vitezele de propagare ale undelor sînt date de

$$c_1^2 = \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \frac{E}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{1}{2(1 + \nu)} \frac{E}{\rho}, \quad (4.3.31)$$

între ele avînd loc relaţia

$$c_1^2 = \frac{2(1 - \nu)}{1 - 2\nu} c_2^2 = \left(1 + \frac{1}{1 - 2\nu}\right) c_2^2, \quad (4.3.32)$$

de unde $c_1 \geqslant c_2 \sqrt{2}$. Ţinînd seama de (4.3.32), se poate arăta uşor că între operatorii lui d'Alembert există o relaţie de forma

$$2(1 - \nu) \Box_1 = \Delta + (1 - 2\nu) \Box_2. \quad (4.3.33)$$

Admiţînd că forţele volumice sînt nule, se poate arăta că starea de deplasare se reprezintă sub forma

$$u_i = \frac{1}{2G} (\Omega_{,i} - 2 \Phi_i), \ (i = 1, 2, 3), \quad (4.3.34)$$

starea de tensiune fiind dată de

$$\sigma_{ij} = - \nu \Box_2 \Omega \delta_{ij} + \Omega_{,ij} - 2\Phi_{(i,j)}; \quad (4.3.35)$$

Scanned with OKEN Scanner

funcţiile $\Phi_i = \Phi_i(x_1, x_2, x_3; t)$ trebuie să fie de clasa C^3 în raport cu variabilele spaţiale şi de clasa C^2 în raport cu timpul. Funcţiile Φ_i, $(i = 1, 2, 3)$, sînt componentele unui vector $\mathbf{\Phi}$, care satisface ecuaţia de propagare a undelor transversale

$$\square_2 \mathbf{\Phi} = 0. \tag{4.3.36}$$

Funcţia $\Omega = \Omega(x_1, x_2, x_3; t)$ trebuie să fie de clasa C^4 în raport cu toate variabilele; ea trebuie să verifice ecuaţia

$$\square_1 \Omega = \frac{1}{1 - \nu} \operatorname{div} \mathbf{\Phi}. \tag{4.3.37}$$

Observăm că putem scrie starea de deplasare şi astfel :

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2G} (\operatorname{grad} \Omega - 2\mathbf{\Phi}).$$

Aceasta constituie o *formulare în deplasări* a problemei generale a elastodinamicii liniare, cu ajutorul a două *funcţii potenţial de deplasare* : o funcţie vectorială şi o funcţie scalară. Această reprezentare este *completă* pentru un domeniu simplu conex (orice stare de deplasare care verifică sistemul fundamental de ecuaţii al elastodinamicii se poate reprezenta sub această formă), fiind dată de P. P. Teodorescu; ea constituie o generalizare la cazul dinamic a reprezentării date de H. Schaefer pentru cazul static.

În cazul unor forţe volumice nenule, se poate găsi o soluţie particulară, folosind aceleaşi reprezentări (4.3.34) şi (4.3.35); vectorul $\mathbf{\Phi}$ trebuie să fie o soluţie particulară a ecuaţiei

$$\square_2 \mathbf{\Phi} = \mathbf{F}, \tag{4.3.38}$$

iar scalarul Ω va fi o soluţie particulară a ecuaţiei

$$\square_1 \square_2 \Omega = \frac{1}{1 - \nu} \operatorname{div} \mathbf{F}. \tag{4.3.39}$$

În cazul unor *forţe volumice conservative*, de forma

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad} \chi, \tag{4.3.40}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\chi = \chi(x_1, x_2, x_3; t)$ este o funcție de clasa C^2 în raport cu variabilele spațiale, exprimăm starea de deplasare particulară prin relația

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2G} \operatorname{grad} \omega, \tag{4.3.41}$$

starea de tensiune fiind dată de

$$\sigma_{ij} = \frac{\nu}{1 - 2\nu} \Delta\omega \, \delta_{ij} + \omega_{,ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3). \tag{4.3.42}$$

Funcția $\omega = \omega(x_1, x_2, x_3; t)$ trebuie să fie de clasa C^3 în raport cu variabilele spațiale și de clasa C^2 în raport cu timpul; dacă dorim să fie verificate și ecuațiile de continuitate în tensiuni, funcția ω trebuie să fie de clasa C^4 în raport cu variabilele spațiale. Această funcție este o integrală particulară a ecuației

$$\Box_1 \omega + \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \chi = 0. \tag{4.3.43}$$

Folosind rezultatele date în 2.3.2.2, putem exprima o soluție particulară a ecuației (4.3.38) sub forma

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi} L^{-1}\left[\frac{1}{R} e^{-p\frac{R}{c_2}} * L[\mathbf{F}]\right]; \tag{4.3.44}$$

de asemenea, o soluție particulară a ecuației (4.3.43) va fi

$$\omega = \frac{1 - 2\nu}{4(1 - \nu)\pi} L^{-1}\left[\frac{1}{R} e^{-p\frac{R}{c_1}} * L[\chi]\right]. \tag{4.3.45}$$

În ambele cazuri, produsul de convoluție se referă la variabilele spațiale.

În mod analog, o soluție particulară a ecuației (4.3.39) se va scrie sub forma

$$\Omega = \frac{1}{2\pi} c_2^2 L^{-1}\left[\frac{1}{p^2}\left[\frac{1}{R}(e^{-p\frac{R}{c_1}} - e^{-p\frac{R}{c_2}})\right]_{,i} * L[F_i]\right], \tag{4.3.46}$$

unde produsul de convoluție se referă tot la variabilele spațiale.

Scanned with OKEN Scanner

Fie spaţiul elastic supus acţiunii unor sarcini dinamice $F_i = F_i(x_1, x_2, x_3 ; t)$ (v. fig. 4.11) ; folosind o prelungire cu valori nule la stînga, vom introduce distribuţiile definite de funcţiile

$$\bar{F}_i(x_1, x_2, x_3 ; t) = \theta(t)\, F_i(x_1, x_2, x_3 ; t), \quad (i = 1, 2, 3). \tag{4.3.47}$$

De asemenea, introducem *deplasările generalizate*

$$\bar{u}_i(x_1, x_2, x_3 ; t) = \theta\,(t)\, u_i(x_1, x_2, x_3 ; t), \quad (i = 1, 2, 3). \tag{4.3.48}$$

Dacă se pun condiţii iniţiale de forma (4.3.29) la momentul $t_0 = 0$, putem scrie

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{u}_i(x_1, x_2, x_3 ; t) = \frac{\tilde{\partial}}{\partial t}\bar{u}_i(x_1, x_2, x_3 ; t) + u_i^0(x_1, x_2, x_3)\,\delta(t),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{u}_i(x_1, x_2, x_3 ; t) = \frac{\tilde{\partial}^2}{\partial t^2}\bar{u}_i(x_1, x_2, x ; t) + \dot{u}_i^0(x_1, x_2, x_3)\,\delta(t) + u_i^0(x_1, x_2, x_3)\,\dot{\delta}\,(t),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_k}\bar{u}_i(x_1, x_2, x_3 ; t) = \frac{\tilde{\partial}^2}{\partial x_j\,\partial x_k}\bar{u}_i(x_1, x_2, x_3 ; t),$$

deci ecuaţiile lui Lamé (4.3.30) se scriu în distribuţii sub forma

$$\mu\Box_2\bar{u}_i + (\lambda + \mu)u_{j,ji} + \bar{F}_i + \rho[\dot{u}_i^0\,\delta(t) + u_i^0\,\dot{\delta}(t)] = 0, \quad (i = 1, 2, 3), \tag{4.3.49}$$

care include şi condiţiile iniţiale. Aplicînd transformata Laplace în raport cu timpul şi transformata Fourier în raport cu variabilele spaţiale, găsim

$$(\mu\alpha_k\alpha_k + \rho p^2)\,F[L[\bar{u}_i]] + (\lambda + \mu)\,\alpha_i\alpha_j\,F[L[\bar{u}_j]] = F[L\,[\bar{F}_i]] + \rho(pF[u_i^0] + F[\dot{u}_i^0]), \quad (i = 1, 2, 3),$$

Scanned with OKEN Scanner

unde p este o variabilă complexă, corespunzătoare transformatei Laplace, iar $\alpha_i,(1, 2, 3)$, sînt variabile complexe corespunzătoare transformatei Fourier. Înmulţind ecuaţiile cu α_i şi sumînd, putem scrie

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 ; p) = \alpha_j F[L[\bar{u}_j]] =$$

$$= \frac{1}{(\lambda + 2\mu)\,\alpha_k\alpha_k + \rho p^2}\,\alpha_j[F[L[\bar{F}_j]] + \rho(pF[u_j^0] + F[\dot{u}_j^0])] ; \tag{4.3.50}$$

în acest caz, transformatele integrale vor fi

$$F[L[\bar{u}_i(x_1, x_2, x_3 ; t)]] = \frac{1}{\mu\,\alpha_k\,\alpha_k + \rho p^2}[F[L[\bar{F}_i]] +$$

$$+ \rho\,(pF[u_i^0] + F[\dot{u}_i^0]) - (\lambda + \mu)\,\alpha_i f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 ; p)],$$

$$(i = 1, 2, 3). \tag{4.3.51}$$

Observînd că

$$F^{-1}\left[\frac{\lambda + \mu}{[(\lambda + 2\mu)\,\alpha_k\,\alpha_k + \rho p^2]\,(\mu\,\alpha_k\,\alpha_k + \rho p^2)}\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi\rho p^2 R}\left(e^{-p\frac{R}{c_1}} - e^{-p\frac{R}{c_2}}\right)$$

unde am introdus vitezele de propagare a undelor date de formulele (4.3.31), şi folosind proprietăţile produsului de convoluţie în legătură cu operaţia de derivare, putem exprima transformatele Laplace ale deplasărilor generalizate sub forma

$$L[\bar{u}_i(x_1, x_2, x_3 ; t)] = \frac{1}{4\pi G}\left\{[L[\bar{F}_i] +\right.$$

$$+ \rho(pu_i^0 + \dot{u}_i^0)] * \frac{1}{R}\,e^{-p\frac{R}{c_2}} + c_2^2\,[(L[\bar{F}_i])_{,i} +$$

$$\left. + \rho(pu_j^0 + \dot{u}_j^0)_{,i}] * \frac{1}{p^2}\left[\frac{1}{R}\left(e^{-p\frac{R}{c_1}} - e^{-p\frac{R}{c_2}}\right)\right]_{,i}\right\}, \tag{4.3.52}$$

produsul de convoluţie referindu-se la variabilele spaţiale.

Scanned with OKEN Scanner

Ţinînd seama de rezultatele de la 1.6.3.1, obţinem starea de deplasare generalizată sub forma

$$\bar{u}_i(x_1,x_2,\ x_3\,;t) = \frac{1}{4\pi G}\left\{L^{-1}\left[L\,[\bar{F}_i] * \frac{1}{R}\,e^{-p\frac{R}{c_2}}\right]+\right.$$

$$+\rho\,[u_i^0 * \frac{1}{R}\,\dot{\delta}\left(t-\frac{R}{c_2}\right) + \dot{u}_i^0 * \frac{1}{R}\quad\left(t-\frac{R}{c_2}\right)+$$

$$+ c_2^2\left\{L^{-1}\,[L\,[\bar{F}_j] * \frac{1}{p^2}\left[\frac{1}{R}\left(e^{-p\frac{R}{c_1}} - e^{-p\frac{R}{c_2}}\right)\right]_{,ij}\right]+$$

$$+\rho\left\{u_{j,j}^0 * \frac{1}{R}\left[\theta\left(t-\frac{R}{c_1}\right) - \theta\left(t-\frac{R}{c_2}\right)\right]\right\}_{,i} +$$

$$\left.+\dot{u}_{j,j}^0 * \left\{\frac{1}{R}\left[\left(t-\frac{R}{c_1}\right)_+ - \left(t-\frac{R}{c_2}\right)_+\right]\right\}_{,i}\right\}\Bigg\},\ (i=1,2,3).$$

(4.3.53)

În cazul unor *condiţii iniţiale omogene* (nule), căpătăm

$$\bar{u}_i(x_1,\,x_2,\,x_3\,;t) = \frac{1}{4\pi G}\left\{L^{-1}\left[L\,[\bar{F}_i] * \frac{1}{R}\,e^{-p\frac{R}{c_2}}\right]+\right.$$

$$\left.+\,c_2^2\,L^{-1}\left[L\,[\bar{F}_j] * \frac{1}{p^2}\left[\frac{1}{R}\left(e^{-p\frac{R}{c_1}} - e^{-p\frac{R}{c_2}}\right)\right]_{,ij}\right]\right\},\quad (4.3.54)$$

$$(i=1,2,3),$$

iar în *lipsa forţelor volumice*, putem scrie

$$\bar{u}_i\,(x_1,\,x_2,\,x_3\,;t) = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{c_2^2}\left[u_i^0 * \frac{1}{R}\,\dot{\delta}\left(t-\frac{R}{c_2}\right)+\right.\right.$$

$$+\,\dot{u}_i^0 * \frac{1}{R}\,\delta\left(t-\frac{R}{c_2}\right)\Big] + u_{j,j}^0 * \left\{\frac{1}{R}\left[\theta\left(t-\frac{R}{c_1}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\,\theta\left(t-\frac{R}{c_2}\right)\right]\right\}_{,i} + \dot{u}_{j,j}^0 * \left\{\frac{1}{R}\left[\left(t-\frac{R}{c_1}\right)_+ - \left(t-\frac{R}{c_2}\right)_+\right]\right\}_{,i}\Bigg\},$$

$$(i=1,2,3).$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă condiţiile iniţiale sînt omogene, vom folosi o reprezentare prin potenţiali; în acest caz, putem considera rezultatele respective ca fiind exprimate în distribuţii, derivatele în sensul teoriei distribuţiilor fiind egale cu cele în sens obişnuit. Fie o *forţă concentrată* $\mathbf{P}(t)$, acţionînd în originea axelor de coordonate ; putem scrie

$$\bar{F}_i = \cos\beta_i \, \bar{P}(t) \, \delta(x_1, x_2, x_3), \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4.3.55)$$

unde $\cos\beta_i$, $(i = 1, 2, 3)$, sînt cosinusuri directoare ale vectorului $\mathbf{P}(t)$.

Folosind formulele (4.3.44) şi (4.3.46), găsim

$$\Phi_i = -\frac{1}{4\pi} \frac{\cos\beta_i}{R} \bar{P}\left(t - \frac{R}{c_2}\right), \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4.3.56)$$

$$\Omega = \frac{1}{2\pi} c_2^2 \cos\beta_j \, \bar{P}(t) \underset{(t)}{*} \left\{ \frac{1}{R} \left[\left(t - \frac{R}{c_1}\right)_+ - \left(t - \frac{R}{c_2}\right)_+ \right] \right\}_{,j},$$

unde produsul de convoluţie se referă la variabila temporală. Obţinem astfel starea de deplasare generalizată

$$\bar{u}_i(x_1, x_2, x_3; t) = \frac{\cos\beta_j}{4\pi G} \left\{ \frac{1}{R} \bar{P}\left(t - \frac{R}{c_2}\right) \delta_{ij} + \right.$$

$$\left. + c_2^2 \bar{P}(t) \underset{(t)}{*} \left\{ \frac{1}{R} \left[\left(t - \frac{R}{c_1}\right)_+ - \left(t - \frac{R}{c_2}\right)_+ \right] \right\}_{,ij} \right\}, (i = 1, 2, 3), \quad (4.3.57)$$

unde

$$\bar{P}(t) = \theta(t) \, P(t). \quad (4.3.58)$$

În particular, dacă

$$\bar{P}(t) = P_0 \delta(t), \quad (4.3.59)$$

deci în cazul unei forţe concentrate acţionînd ca un *şoc la momentul iniţial*, obţinem

$$\bar{u}_i(x_1, x_2, x_3; t) = \frac{P_0 \cos\beta_j}{4\pi G} \left\{ \frac{1}{R} \delta\left(t - \frac{R}{c_2}\right) \delta_{ij} + \right.$$

$$\left. + c_2^2 \left\{ \frac{1}{R} \left[\left(t - \frac{R}{c_1}\right)_+ - \left(t - \frac{R}{c_2}\right)_+ \right] \right\}_{,ij} \right\}, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4.3.60)$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $P_0 = 1$ căpătăm *tensorul soluție fundamentală* în sensul teoriei distribuțiilor, de componente

$$u_{ij}(x_1, x_2, x_3; t) = \frac{1}{4\pi G}\left\{\frac{1}{R}\delta\left(t - \frac{R}{c_2}\right)\delta_{ij} + \right.$$

$$\left. + c_2^2\left\{\frac{1}{R}\left[\left(t - \frac{R}{c_1}\right)_+ - \left(t - \frac{R}{c_2}\right)_+\right]\right\}_{,ij}\right\}, \quad (i,j = 1,2,3,). \tag{4.3.61}$$

Starea de deplasare generalizată, corespunzătoare unor forțe volumice arbitrare și unor condiții inițiale neomogene, va fi dată în acest caz de

$$\bar{u}_i(x_1, x_2, x_3; t) = u_{ij} * \{\bar{F}_j + \rho[\dot{u}_j^0\,\delta(t) + u_j^0\dot{\delta}(t)]\}, \quad (i=1,2,3), \tag{4.3.62}$$

unde produsul de convoluție se referă atît la variabilele spațiale, cît și la variabila temporală.

Este interesant să observăm că, admițînd că $P(t)$ este o funcție obișnuită, G. G. Stokes a găsit formula (4.3.57), în 1849, sub forma

$$u_1(x_1, x_2, x_3; t) = \frac{1}{4\pi\rho R}\left[\frac{1}{c_1^2}\frac{x_1^2}{R^2}P\left(t - \frac{R}{c_1}\right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{c_2^2}\left(1 - \frac{x_1^2}{R^2}\right)P\left(t - \frac{R}{c_2}\right) - \left(1 - 3\frac{x_1^2}{R^2}\right)\int_{1/c_1}^{1/c_2}\lambda P(t - \lambda R)\,\mathrm{d}\lambda\Big],$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3; t) = \frac{x_1 x_2}{4\pi\rho R}\left[\frac{1}{c_1^2}P\left(t - \frac{R}{c_1}\right) - \frac{1}{c_2^2}P\left(t - \frac{R}{c_2}\right) + \right. \tag{4.3.57'}$$

$$\left. + 3\int_{1/c_1}^{1/c_2}\lambda P(t - \lambda R)\,\mathrm{d}\lambda\right],$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3; t) = \frac{x_1 x_3}{4\pi\rho R}\left[\frac{1}{c_1^2}P\left(t - \frac{R}{c_1}\right) - \frac{1}{c_2^2}P\left(t - \frac{R}{c_2}\right) + \right.$$

$$\left. + 3\int_{1/c_1}^{1/c_2}\lambda P(t - \lambda R)\,\mathrm{d}\lambda\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

În sfîrșit, dacă *aplicăm* în mod *brusc o forță concentrată* în originea axelor de coordonate la momentul inițial și *menținem* apoi această forță concentrată *constantă în timp*, putem scrie

$$\bar{P}(t) = P_0\theta(t), \tag{4.3.63}$$

rezultînd deplasările generalizate

$$\bar{u}_i(x_1, x_2, x_3; t) = \frac{P_0\cos\beta_j}{8\pi G}\left\{\frac{2}{R}\,\delta\left(t-\frac{R}{c_2}\right)\delta_{ij} + \right.$$

$$\left. + c_2^2\left\{\frac{1}{R}\left[\left(t-\frac{R}{c_1}\right)_+^2 - \left(t-\frac{R}{c^2}\right)_+^2\right]\right\}_{,ij}\right\},\ (i=1,2,3). \tag{4.3.64}$$

În cazul spațiului elastic supus acțiunii unui *centru de rotație* de mărime $M(t)$, aplicat în originea axelor de coordonate, într-un plan de normală $\mathbf{n}$, vom considera de asemenea condiții inițiale omogene. Sarcina echivalentă cu acest moment concentrat rotațional se va exprima sub forma

$$\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3; t) = -\frac{1}{2}M(t)\mathbf{n} \times \operatorname{grad}\,\delta(x_1, x_2, x_3). \tag{4.3.65}$$

Observînd că

$$(L[\bar{F}_i])_{,i} = 0$$

și folosind formula (4.3.52), rezultă

$$L[\bar{u}_i] = \frac{1}{4\pi G}\,L[\bar{F}_i] * \frac{1}{R}\,e^{-p\frac{R}{c_2}};$$

prin urmare, putem scrie deplasarea generalizată

$$\bar{\mathbf{u}}(x_1, x_2, x_3; t) = -\frac{1}{8\pi G}\,\mathbf{n} \times \operatorname{grad}\left[\frac{1}{R}\,\bar{M}\left(t-\frac{R}{c_2}\right)\right], \tag{4.3.66}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$\bar{M}(t) = \theta(t)\, M(t). \tag{4.3.67}$$

În cazul unui moment concentrat rotațional acționînd ca un *șoc inițial*, de forma

$$\bar{M}(t) = M_0 \delta(t), \tag{4.3.68}$$

obținem

$$\bar{\mathbf{u}}(x_1, x_2, x_3; t) = -\frac{M_0}{8\pi G}\, \mathbf{n} \times \operatorname{grad}\left[\frac{1}{R}\, \delta\left(t - \frac{R}{c_2}\right)\right], \tag{4.3.69}$$

iar în cazul unui moment concentrat rotațional, *aplicat brusc* la momentul inițial și *menținut* apoi *constant în timp*, de forma

$$\bar{M}(t) = M_0 \theta(t),$$

rezultă

$$\bar{\mathbf{u}}(x_1, x_2, x_3; t) = -\frac{M_0}{8\pi G}\, \mathbf{n} \times \operatorname{grad}\left[\frac{1}{R}\, \theta\left(t - \frac{R}{c_2}\right)\right].$$

Fie acum cazul unui *centru de dilatare spațială*, exprimat prin sarcina echivalentă

$$\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3; t) = -\frac{1}{3}\, D_s(t) \operatorname{grad} \delta(x_1, x_2, x_3); \tag{4.3.70}$$

introducem astfel o distribuție definită de funcția

$$\bar{D}_s(t) = \theta(t) D_s(t). \tag{4.3.71}$$

În cazul unor condiții inițiale omogene, vom folosi formulele (4.3.54); observăm că

$$L[\bar{F}_i] * \frac{1}{R} e^{-p\frac{R}{c_2}} = -\frac{1}{3} L[\bar{D}(t)] \left(\frac{1}{R} e^{-p\frac{R}{c_2}}\right)_{,i},$$

$$L[\bar{F}_j] * \frac{1}{p^2}\left[\frac{1}{R}\left(e^{-p\frac{R}{c_1}} - e^{-p\frac{R}{c_2}}\right)\right]_{,ij} =$$

$$= -\frac{1}{3p^2} L[\bar{D}(t)]\, \Delta\left[\frac{1}{R}\left(e^{-p\frac{R}{c_1}} - e^{-p\frac{R}{c_2}}\right)\right]_{,i},$$

Scanned with OKEN Scanner

unde Δ este operatorul lui Laplace. Putem scrie

$$\Delta(fg) = ((fg)_{,i})_{,i} = (f_{,i}g + fg_{,i})_{,i} = f\Delta g + g\Delta f + 2f_{,i}g_{,i}, \tag{4.3.72}$$

astfel încît

$$\Delta\left(\frac{1}{R}\,e^{-p\frac{R}{c_k}}\right) = e^{-p\frac{R}{c_k}}\Delta\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{1}{R}\,\Delta(e^{-p\frac{R}{c_k}}) +$$

$$+ 2\left(\frac{1}{R}\right)_{,i}(e^{-p\frac{R}{c_k}})_{,i},\ (k = 1, 2),$$

unde ținem seama de formula (1.6.20) și de

$$\Delta(e^{-p\frac{R}{c_k}}) = \left(\frac{p}{c_k}\right)^2 e^{-p\frac{R}{c_k}}R_{,i}R_{,i} - \frac{p}{c_k}e^{-p\frac{R}{c_k}}\Delta R,\ (k = 1, 2),$$

cu

$$R_{,i} = \frac{x_i}{R},\ R_{,i}R_{,i} = 1,\ (i = 1, 2, 3), \tag{4.3.73}$$

și

$$\Delta R = (R_{,i})_{,i} = -\frac{x_i x_i}{R^3} + \frac{3}{R} = \frac{2}{R}. \tag{4.3.74}$$

Dar

$$\psi(x_1, x_2, x_3)\ \delta(x_1 x_2, x_3) = \psi(0, 0, 0)\ \delta(x_1, x_2, x_3),$$

unde ψ este o funcție de clasa C^∞, astfel încît

$$(e^{-p\frac{R}{c_1}} - e^{-p\frac{R}{c_2}})\ \Delta\left(\frac{1}{R}\right) = 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

unde folosim și formula (1.6.20); avem, de asemenea,

$$\left(\frac{1}{R}\right)_{,i}(e^{-p\frac{R}{c_k}})_{,i} = -\frac{R_{,i}}{R^2}\left(-\frac{p}{c_k}\right)e^{-p\frac{R}{c_k}}R_{,i} = \frac{1}{R^2}\frac{p}{c_k}e^{-p\frac{R}{c_k}},$$

$$(k = 1, 2).$$

Din formulele anterioare, mai putem scrie

$$\Delta\left[\frac{1}{R}(e^{-p\frac{R}{c_1}} - e^{-p\frac{R}{c_2}})\right] = \frac{1}{R}\left[\left(\frac{p}{c_1}\right)^2 e^{-p\frac{R}{c_1}} - \left(\frac{p}{c_2}\right)^2 e^{-p\frac{R}{c_2}}\right],$$

deci starea de deplasare generalizată se scrie

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{12\pi G}\frac{c_1^2}{c_2^2}\operatorname{grad}\left[\frac{1}{R}\bar{D}_s\left(t - \frac{R}{c_1}\right)\right] =$$

$$= -\frac{1 - 2\nu}{24\pi(1 - \nu)G}\operatorname{grad}\left[\frac{1}{R}\bar{D}_s\left(t - \frac{R}{c_1}\right)\right]. \quad (4.3.75)$$

Putem ajunge la acest rezultat și pe altă cale; astfel, dacă folosim reprezentarea prin funcții potențial dată la subpunctul precedent și observăm că sarcinile echivalente (4.3.70) au un caracter conservativ, obținem

$$\chi = -\frac{1}{3}\bar{D}_s(t)\delta(x_1, x_2, x_3). \quad (4.3.76)$$

În acest caz

$$\omega = -\frac{1 - 2\nu}{12\pi(1 - \nu)}\frac{1}{R}\bar{D}_s\left(t - \frac{R}{c_1}\right), \quad (4.3.77)$$

ceea ce ne conduce tot la deplasările generalizate (4.3.75).

În cazul unui *șoc la momentul inițial*, exprimat sub forma

$$\bar{D}_s(t) = D_0\delta(t), \quad (4.3.78)$$

Scanned with OKEN Scanner

căpătăm

$$\bar{\mathbf{u}} = -\frac{(1-2\nu)D_0}{24\pi(1-\nu)G}\,\mathrm{grad}\left[\frac{1}{R}\delta\left(t-\frac{R}{c_1}\right)\right], \quad (4.3.79)$$

iar în cazul unui centru de dilatare spațială *aplicat brusc și menținut constant în timp*

$$\bar{D}_s(t) = D_0\,\theta(t),$$

putem scrie

$$\bar{\mathbf{u}} = -\frac{(1-2\nu)D_0}{24\pi(1-\nu)G}\,\mathrm{grad}\left[\frac{1}{R}\theta\left(t-\frac{R}{c_1}\right)\right].$$

În mod analog, se pot considera și alte cazuri de încărcare cu sarcini concentrate sau repartizate.

Scanned with OKEN Scanner

APLICAȚII ALE TEORIEI DISTRIBUȚIILOR ÎN FIZICĂ

5.1. Aplicații ale teoriei distribuțiilor în acustică

5.1.1. *Efectul Doppler pentru unda sonoră unidimensională*

5.1.1.1. Caz clasic

Efectul Doppler constă în variația numărului de oscilații (sau în variația frecvenței), înregistrat de un receptor, atunci cînd sursa (sau receptorul) se deplasează în raport cu mediul.

Dacă unda sonoră se propagă într-o singură direcție (de exemplu axa Ox), într-un mediu omogen, izotrop și liniar elastic, atunci ecuația diferențială de propagare a undei este

$$c^2 \frac{\partial^2 u(x\,;\,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x\,;\,t)}{\partial t^2} = 0, \qquad (5.1.1)$$

unde c reprezintă viteza de propagare a undei în mediul considerat, iar $u(x\,;\,t)$ este elongația. În cazul vibrațiilor longitudinale,

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \qquad (5.1.2)$$

unde ρ este densitatea, iar E este modulul de elasticitate longitudinală a mediului elastic. În cazul vibrațiilor

Scanned with OKEN Scanner

transversale, ecuaţia (5.1.1) devine *ecuaţia coardei vibrante*, cu

$$c = \sqrt{\frac{T}{m}}, \qquad (5.1.2')$$

unde T este tensiunea constantă, tangentă la forma deformată a coardei, iar m este masa unităţiii de lungime; şi în acest caz, constanta c exprimă viteza de propagare a vibraţiilor transversale.

În caz bi- sau tridimensional, intervine ecuaţia

$$c^2 \Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \qquad (5.1.3)$$

unde Δ este operatorul lui Laplace în două sau trei variabile spaţiale. Un studiu al acestor ecuaţii de tip hiperbolic, incluzînd şi determinarea soluţiilor fundamentale, corespunzătoare, a fost făcut în 2.3.2.2.

Dacă c reprezintă viteza de propagare a undei elastice în mediu, v viteza sursei sonore, iar u viteza receptorului, atunci între aceste mărimi şi frecvenţele f şi f' ale sursei, respectiv ale receptorului, există relaţia

$$f' = \frac{c + u}{c - v} f; \qquad (5.1.4)$$

s-a admis că sursa emite oscilaţii cu perioada T, deci de frecvenţă $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$, iar receptorul înregistrează oscilaţii de perioadă T', adică de frecvenţă $f' = \frac{1}{T'} = \frac{\omega'}{2\pi}$, unde ω şi ω' sînt pulsaţiile (frecvenţele circulare). Această relaţie reprezintă expresia matematică a efectului Doppler. Menţionăm că, în relaţia (5.1.4), viteza v se consideră pozitivă dacă sursa se apropie de receptor şi negativă dacă se îndepărtează de acesta; de asemenea, viteza u se consideră pozitivă în cazul apropierii de sursă şi negativă în caz contrar.

Scanned with OKEN Scanner

5.1.1.2. Caz anizotrop

Notînd cu c_1 și c_2 *vitezele de propagare* (longitudinală) *a undei sonore unidimensionale la dreapta*, respectiv *la stînga*, și admițînd că în timpul propagării undei nu au loc pierderi de energie (energia cinetică se transformă integral în energie potențială, corespunzătoare deformărilor elastice, și invers), atunci ecuația diferențială de propagare a undei sonore într-un mediu elastic este

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c_1 \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c_2 \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x\,;\,t) = 0. \qquad (5.1.5)$$

Faptul că fenomenul acustic diferă după sensul de propagare, poate fi echivalat cu o anumită anizotropie a mediului ; vom considera deci că unda acustică undimensională se propagă într-un *mediu anizotrop*.

Dacă luăm în considerare și influența forțelor exterioare, ecuația (5.1.5) devine

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c_1 \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c_2 \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x\,;\,t) = X(x\,;\,t),$$

unde $X(x\,;\,t)$ sînt mărimi proporționale cu forțele perturbatoare. Un asemenea caz are loc atunci cînd unda sonoră unidimensională se propagă în atmosferă, pe timp de vînt.

5.1.2. *Efectul Doppler în prezența vîntului*

5.1.2.1. Considerații generale

În cazul propagării unei unde sonore în atmosferă, în prezența vîntului, putem folosi ecuația (5.1.5′) de propagare a unei unde sonore unidimensionale într-un mediu anizotrop.

Vom admite că mediul în care se propagă unda sonoră este elastic și anizotrop. Notăm cu c viteza de propagare a undei sonore unidimensionale și cu w viteza vîntului.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă unda se propagă în direcţia vîntului, viteza ei de propagare va fi modificată de acesta, fiind deci egală cu

$$c_1 = c + w\,; \tag{5.1.6}$$

în mod analog, viteza de propagare a undei în sens contrar vîntului va fi

$$c_2 = c - w.$$

Prin urmare, ecuaţia diferenţială de propagare a undelor sonore unidimensionale în atmosferă, luînd în considerare viteza w a vîntului, va fi

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (c + w)\frac{\partial}{\partial x}\right]\left[\frac{\partial}{\partial t} - (c - w)\frac{\partial}{\partial x}\right]u(x\,;t) = X(x\,;t)\,; \tag{5.1.7}$$

cu ajutorul acestei ecuaţii putem studia efectul Doppler pentru unda sonoră unidimensională, în prezenţa vîntului.

Pentru aceasta admitem că sursa punctiformă, care emite oscilaţii, are frecvenţa $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$ şi se deplasează uniform, cu viteza constantă v; deplasarea sursei sonore punctiforme începe la momentul iniţial $t = 0$, în sensul pozitiv al axei Ox, sens în care se propagă unda. În acest caz, intensitatea sursei sonore ne conduce la o forţă exterioară, care este proporţională cu $c^2 e^{i\omega t}$; vom putea scrie

$$X(x\,;t) = c^2\, e^{i\omega t}\, \delta(x - vt) \times \theta(t), \tag{5.1.7'}$$

unde $\theta(t)$ reprezintă distribuţia lui Heaviside, iar $\delta(x)$ este distribuţia lui Dirac şi unde am introdus produsul direct.

Deoarece sursa sonoră se deplasează uniform cu viteza $v > 0$, pentru $t \geqslant 0$, rezultă că distribuţia lui Dirac $\delta(x - vt)$ este concentrată în punctul $x = vt \geqslant 0$ de pe axa Ox, deci pe semiaxa $x \geqslant 0$; în mod analog, suportul lui $\theta(t)$ este semidreapta $t \geqslant 0$. Prin urmare, ambele distribuţii admit transformate Laplace, în raport cu x, respectiv cu t; această observaţie ne va permite să studiem ecuaţia diferenţială (5.1.7) cu (5.1.7') folosind transformatele Laplace.

Scanned with OKEN Scanner

Vom nota cu p și q variabilele complexe corespunzătoare lui x, respectiv lui t, după ce am efectuat transformata Laplace în distribuții. Aplicînd succesiv această transformată în raport cu x și t ecuației (5.1.7), (5.1.7'), obținem

$$[(c+w)p+q][(c-w)p-q]\tilde{u}(p,q) = -\frac{c^2}{q+vp-\mathrm{i}\omega}, \tag{5.1.8}$$

unde am ținut seama de formulele (1.5.68) și (1.5.76); rezultă

$$\tilde{u}(p,q) = -\frac{c^2}{[(c+w)p+q][(c-w)p-q][vp-\mathrm{i}\omega+q]} = \frac{A(p)}{q-q_1}+\frac{B(p)}{q-q_2}+\frac{C(p)}{q-q_3}, \tag{5.1.9}$$

unde

$$q_1 = -p(c+w),\quad q_2 = p(c-w),\quad q_3 = \mathrm{i}\omega - vp \tag{5.1.9'}$$

și

$$A(p) = \frac{c}{2p[p(c+w-v)+\mathrm{i}\omega]},$$

$$B(p) = \frac{c}{2p[p(c-w+v)-\mathrm{i}\omega]}, \tag{5.1.9''}$$

$$C(p) = -\frac{c^2}{[p(c+w-v)+\mathrm{i}\omega][p(c-w+v)-\mathrm{i}\omega]}.$$

Aplicînd transformata Laplace inversă în raport cu variabila q, căpătăm

$$\tilde{u}(p) = [A(p)\,\mathrm{e}^{q_1 t} + B(p)\,\mathrm{e}^{q_2 t} + C(p)\,\mathrm{e}^{q_3 t}]\,\theta(t) =$$
$$= A(p)\,\theta(t)\mathrm{e}^{-p(c+w)t} + B(p)\,\theta(t)\mathrm{e}^{p(c-w)t} + C(p)\,\theta(t)\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\omega-vp)t};$$

folosind formula (1.5.72) și aplicînd transformata Laplace inversă în raport cu variabila p, obținem

$$u(x;t) = \theta(t)A_1[x-(c+w)t] +$$
$$+\theta(t)B_1[x+(c-w)t] + \theta(t)C_1(x-vt)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \tag{5.1.10}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde am notat

$A_1(x) = L^{-1}[A(p)]$, $B_1(x) = L^{-1}[B(p)]$, $C_1(x) = L^{-1}[C(p)]$.

Plecînd de la (5.1.9''), observăm că putem scrie

$$A(p) = \frac{A'(p)}{p} + \frac{A''(p)}{p - p_1}, \quad B(p) = \frac{B'(p)}{p} + \frac{B''(p)}{p - p_2},$$

$$C(p) = \frac{C'(p)}{p - p_3} + \frac{C''(p)}{p - p_4}, \tag{5.1.11}$$

unde

$$p_1 = p_3 = -\frac{i\omega}{c + w - v}, \quad p_2 = p_4 = \frac{i\omega}{c - w + v}$$

și

$$A' = B'' = C' = \frac{c}{2i\omega},$$

$$A'' = B' = C'' = -\frac{c}{2i\omega};$$

în consecință

$$A_1(x) = \frac{c}{2i\omega}\,\theta(x)\left(1 - e^{-\frac{i\omega}{c+w-v}x}\right),$$

$$B_1(x) = -\frac{c}{2i\omega}\,\theta(x)\left(1 - e^{\frac{i\omega}{c-w+v}x}\right), \tag{5.1.12}$$

$$C_1(x) = \frac{c}{2i\omega}\,\theta(x)\left(e^{-\frac{i\omega}{c+w-v}x} - e^{\frac{i\omega}{c-w+v}x}\right).$$

În felul acesta, elongația (5.1.10) capătă forma

$$u(x;t) = \frac{c\theta(t)}{2i\omega}\{\theta[x - (c + w)t] - \theta[x + (c - w)t] +$$

$$+ \{\theta(x - vt) - \theta[x - (c + w)t]\}e^{-\frac{i\omega}{c+w-v}[x-(c+w)t]} -$$

$$- \{\theta(x - vt) - \theta[x + (c - w)t]\}e^{\frac{i\omega}{c-w+v}[x+(c-w)t]}\}. \tag{5.1.13}$$

Scanned with OKEN Scanner

Plecînd de la acest rezultat, putem deduce diferite soluţii particulare.

Să admitem astfel că $x > 0$, $t > 0$, $w < c$, precum şi $v < c + w = c_1$; această ultimă condiţie ne arată că viteza sursei sonore este mai mică decît viteza undei în direcţia mişcării sursei (aceeaşi cu direcţia vîntului). Folosind formulele lui Euler de forma (2.3.83), (2.3.83′), şi luînd partea reală a elongaţiei (5.1.13), putem scrie

$$u(x;t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t < \dfrac{x}{c+w}, \\ -\dfrac{c}{2\omega} \sin \dfrac{\omega[x-(c+w)t]}{c+w-v} & \text{pentru } \dfrac{x}{c+w} < t < \dfrac{x}{v}, \\ \dfrac{c}{2\omega} \sin \dfrac{\omega[x+(c-w)t]}{c-w+v} & \text{pentru } t > \dfrac{x}{v}. \end{cases} \tag{5.1.14}$$

De aici se observă că la momentul $t = \dfrac{x}{v}$ apare o discontinuitate iar frecvenţa suferă un salt, trecînd de la valoarea

$$f' = \frac{c+w}{c+w-v} \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c+w}{c-(v-w)} f \tag{5.1.15}$$

la valoarea

$$f'' = \frac{c-w}{c-w+v} \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c-w}{c+(v-w)} f,$$

în concordanţă cu principiul lui Doppler; în felul acesta se obţine o generalizare a relaţiei (5.1.4).

5.2. Aplicaţii ale teoriei distribuţiilor în optică

Printre fenomenele importante ce însoţesc propagarea undelor acustice, optice etc. se numără reflexia, refracţia şi difracţia acestora; cunoaşterea acestor fenomene este legată de studiul ecuaţiei undelor în medii neomo-

Scanned with OKEN Scanner

gene. Pentru studiul interferenței și difracției undelor luminoase este suficient să ținem seama de caracterul ondulatoriu al propagării luminii, neglijînd caracterul electromagnetic al acestui proces. De aceea, o undă luminoasă va fi caracterizată numai prin amplitudine, fază, lungime de undă și viteză de propagare.

Toate rezultatele pe care le vom obține se bazează pe principiul lui Huygens, conform căruia suprafețele de undă succesive ale unei unde date sînt înfășurătoarele suprafețelor de undă ale undelor elementare presupuse emise de toate punctele uneia dintre suprafețele de undă ale undei respective, în momentul în care acea suprafață de undă ajunge în acele puncte.

5.2.1. *Fenomenul de difracție la infinit*

5.2.1.1. Rezultate generale. Cazul sursei punctiforme

O proprietate caracteristică pentru propagarea undelor este aceea de a se curba la trecerea printr-o fantă într-un paravan (de a da difracție). O *fantă de difracție plană* (pupilă) se caracterizează printr-o *funcție de repartiție* $f(x, y)$ a variabilei luminoase; plecînd de la aceasta, se poate determina *figura de difracție la infinit.*

Pentru calculul figurii de difracție la infinit a unei fante de difracție plană se folosește principiul lui Huygens. Un element de arie $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, în planul $z = 0$, emite o undă elementară de amplitudine $f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ în direcția de cosinusuri directoare α, β, γ, defazată cu $\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y)$ în raport cu unda elementară emisă în originea O; aici λ este lungimea de undă.

Prin suprapunerea efectelor, obținem

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}(\alpha x + \beta y)}{\lambda}}\, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad (5.2.1)$$

unde Ω este domeniul ocupat de fanta de difracție plană. Dacă formăm figura de difracție la infinit în focarul unei

Scanned with OKEN Scanner

lentile de distanţă focală l, facem să corespundă un punct din planul focal la o direcţie (α, β, γ), prin relaţiile

$$x' = \frac{\alpha}{\gamma} l, \quad y' = \frac{\beta}{\gamma} l. \tag{5.2.2}$$

În mod obişnuit, figura de difracţie la infinit este cuprinsă într-o vecinătate a axei Oz; putem considera $\alpha, \beta \ll 1$, aşa încît $\gamma \approx 1$, iar

$$x' = l\alpha, \quad y' = l\beta. \tag{5.2.2'}$$

Dacă se ia lungimea de undă λ ca unitate de lungime şi dacă se adoptă în planul focal coordonatele reduse

$$u = \frac{x'}{l}, \quad v = \frac{y'}{l}, \tag{5.2.3}$$

suficient de mici în raport cu unitatea, obţinem pentru figura de difracţie la infinit o repartiţie de forma

$$F(u, v) = \iint_{R^2} f(x, y)\ e^{2\pi i(ux+vy)}\ dx\ dy. \tag{5.2.4}$$

Introducînd transformata Fourier $F(u, v) = F[f(x, y)]$ a funcţiei $f(x, y)$, observăm că

$$F(u,v) = \tilde{F}\ (2\pi u, 2\pi v); \tag{5.2.4'}$$

deci figura de difracţie la infinit $F(u, v)$ a funcţiei de repartiţie $f(x, y)$ a variabilei luminoase este transformata Fourier a acestei funcţii în punctul $(2\ \pi u,\ 2\ \pi v)$.

În unele cazuri, repartiţia variabilei luminoase nu poate fi exprimată printr-o funcţie obişnuită; astfel, în cazul unei surse punctiforme, funcţia de repartiţie a variabilei luminoase ar trebui să fie nulă peste tot, cu excepţia unui singur punct, unde valoarea sa nu este determinată. În acest caz, funcţia de repartiţie se va exprima printr-o distribuţie cu suport punctual şi anume cu ajutorul distribuţiei lui Dirac.

În felul acesta, pentru sursele punctiforme se foloseşte o reprezentare de aceeaşi formă ca şi pentru masele puncti-

Scanned with OKEN Scanner

forme; astfel, pentru o sursă luminoasă punctiformă în punctul (x_0, y_0), repartiția variabilei luminoase va fi dată de distribuția

$$f(x, y) = k\delta(x - x_0, y - y_0), \; k = \text{const.} \qquad (5.2.5)$$

Figura de difracție la infinit va avea deci o repartiție dată de

$$F(u, v) = k\, e^{2\pi i(ux_0 + vy_0)}. \qquad (5.2.6)$$

5.2.1.2. **Exemple**

Fie acum o fantă de lungime $2a$ și de lățime neglijabilă, dispusă după axa Ox, simetric față de originea O (fig. 5.1). Admitem că funcția de repartiție a variabilei luminoase este egală cu unitatea pe toată lungimea fantei; în consecință, această funcție se va scrie sub forma

$$f(x) = h(x) = \theta(a - |x|), \qquad (5.2.7)$$

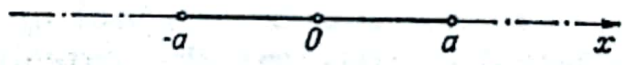


Fig. 5.1.

unde $h(x)$ este funcția caracteristică unui interval $[-a, a]$, dată de (1.1.98). Folosind transformata Fourier (1.6.23''), găsim

$$F(u) = \frac{\sin 2\pi au}{\pi u}. \qquad (5.2.8)$$

Vom considera și o fantă dreptunghiulară de dimensiuni $2a$ și $2b$, axele de coordonate fiind după axele sale de simetrie (fig. 5.2). Funcția de repartiție a variabilei luminoase va fi considerată constantă și egală cu unitatea; în acest caz, putem scrie

$$f(x, y) = h(x)\, h(y) = \theta(a - |x|)\, \theta(b - |y|). \qquad (5.2.9)$$

Scanned with OKEN Scanner

Figura de difracţie la infinit va fi dată de

$$F(u, v) = \frac{\sin 2\pi au \sin 2\pi bv}{\pi^2 uv}. \qquad (5.2.10)$$

Observăm că cele expuse mai sus cu privire la difracţie ca fenomen optic este valabil şi pentru difracţie, privită ca fenomen acustic, ambele fenomene fizice fiind fenomene ondulatorii.

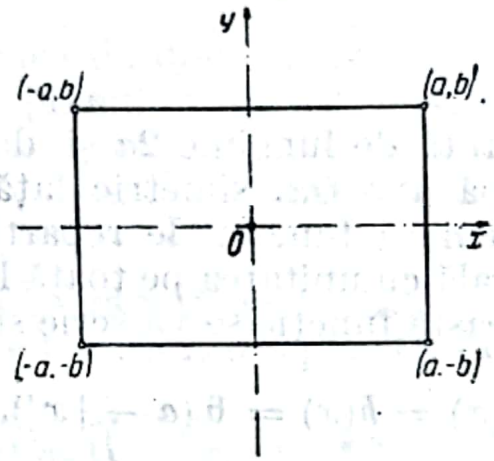


Fig. 5.2.

5.2.2. *Difracţia de tip Fresnel*

5.2.2.1. Consideraţii generale

În general, fenomenul de difracţie apare în cazul obturării parţiale a fasciculelor luminoase cu ajutorul unor paravane opace; menţionăm astfel difracţia de tip Fraunhofer şi difracţia de tip Fresnel; astfel, difracţia observată direct — fără utilizarea unor instrumente optice — este o *difracţie de tip Fresnel.*

Fie o fantă de difracţie plană, într-un plan de difracţie, şi fie $f(x, y)$ repartiţia variabilei luminoase corespunzătoare. Datorită fenomenului de difracţie, într-un plan de observaţie, paralel cu primul şi situat la distanţă finită, va corespunde o imagine caracterizată de funcţia $h(x, y)$; prin urmare, funcţia $h(x, y)$ reprezintă repartiţia variabilei luminoase în planul de observaţie, corespunză-

Scanned with OKEN Scanner

tor funcției de repartiție a variabilei luminoase $f(x, y)$ din planul de difracție (fig. 5.3).

Prin modificarea fantei, deci a variabilei luminoase $f(x, y)$, se va modifica și figura difractată din planul de

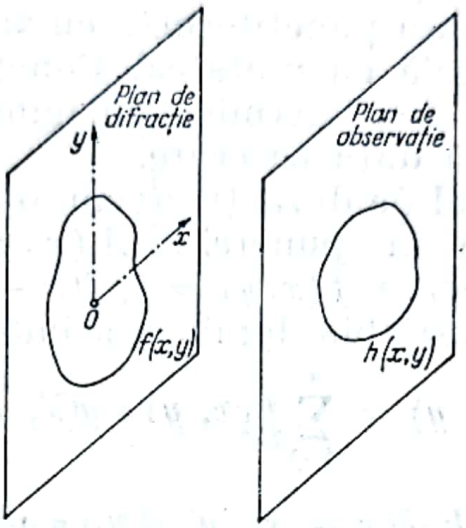


Fig. 5.3.

observație, adică se va modifica și variabila luminoasă imagine $h(x, y)$. Liniaritatea ecuațiilor lui Maxwell, care — în ultimă instanță — descriu fenomenul de difracție, face ca modificarea prin translație a fantei să conducă la o aceeași modificare prin translație a figurii de difracție, în planul de observație.

5.2.2.2. Determinarea figurii de difracție în planul de observație

În baza celor expuse, există o funcție $g(x, y)$, independentă de fantă și funcție de distanța dintre cele două plane, astfel încît între cele două variabile luminoase să aibă loc o relație de forma

$$h(x, y) = f(x, y) * g(x, y), \qquad (5.2.11)$$

unde am introdus produsul de convoluție.

Astfel, dacă sursa luminoasă este punctiformă, situată în originea axelor de coordonate din planul de difracție, și are o intensitate egală cu unitatea, atunci

$$f(x, y) = \delta(x, y), \qquad (5.2.12)$$

Scanned with OKEN Scanner

repartiția variabilei luminoase fiind astfel exprimată cu ajutorul distribuției lui Dirac; observînd că $\delta(x, y)$ este elementul neutru în algebra de convoluție, rezultă

$$h(x, y) = \delta(x, y) * g(x, y) = g(x, y). \quad (5.2.13)$$

Prin urmare, funcția (sau distribuția) $g(x, y)$ reprezintă răspunsul la o fantă punctiformă, cu variabila luminoasă de intensitate egală cu unitatea. Funcția $g(x, y)$ odată precizată, se poate determina imaginea $h(x, y)$ pentru o fantă de formă dată oarecare.

Dacă în planul de difracție avem date n fante punctiforme, situate în punctele $A_i(x_i, y_i)$, cu repartiția variabilei luminoase $f_i(x, y) = k_i\,\delta(x - x_i, y - y_i)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, variabila luminoasă imagine va fi dată de

$$h(x, y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x, y) * g(x, y) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} k_i\,\delta(x - x_i, y - y_i) * g(x, y);$$

prin urmare

$$h(x, y) = \sum_{i=1}^{n} k_i\, g(x - x_i, y - y_i). \quad (5.2.14)$$

Acest caz corespunde la ceea ce se numește o *rețea de difracție*.

5.3. Intensitatea și potențialul cîmpului electrostatic

5.3.1. *Relații între intensitatea, potențialul și densitatea volumică a unei sarcini electrice*

5.3.1.1. Cazul unei sarcini electrice punctuale

Fie o sarcină electrică punctuală q, situată în originea axelor de coordonate (fig. 5.4); *densitatea* sa *volumică* va fi dată de relația (3.4.7) [sau (3.4.7')]. Această sarcină creează un cîmp electrostatic, definit prin *vectorul intensitate* **E**, de mărime

$$E(x, y, z) = E(\mathbf{r}) = \frac{q}{R^2} = \frac{q}{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (5.3.1)$$

Funcţia $E(x, y, z)$ are o discontinuitate în origine, totuşi este local integ abilă; prin urmare, distribuţia generată de această funcţie este o distribuţie regulată.

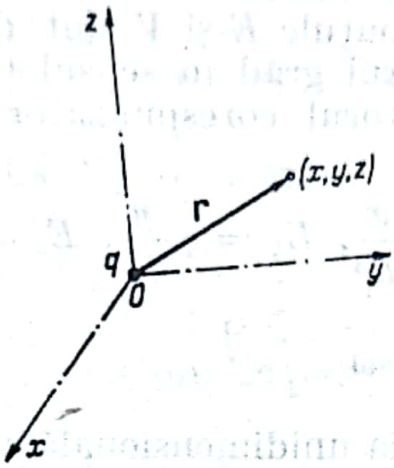


Fig. 5.4.

Prin definiţie, *potenţialul* sarcinii electrice punctuale q este o mărime scalară, dată de

$$V(x, y, z) = V(\mathbf{r}) = \frac{q}{R} = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \qquad (5.3.2)$$

observăm ca şi această funcţie este local integrabilă, determinînd astfel o distribuţie regulată.

Între vectorul intensitate $\mathbf{E}$ şi potenţialul V are loc relaţia

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V; \qquad (5.3.3)$$

dacă aplicăm operatorul divergenţă acestei relaţii, obţinem

$$-\operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div} \operatorname{grad} V = \Delta V =$$

$$= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\rho, \qquad (5.3.4)$$

deci o *ecuaţie de tip Poisson*, care leagă potenţialul şi densitatea volumică a unei sarcini electrice. Ecuaţiile (5.3.3) şi (5.3.4) constituie ecuaţiile fundamentale ale cîmpului electrostatic. Aceste ecuaţii vor fi considerate în spaţiul distribuţiilor.

Ţinînd seama de relaţia (1.4.35), constatăm că potenţialul (5.3.2) verifică ecuaţia diferenţială în distribuţii

Scanned with OKEN Scanner

(5.3.4). Dacă operatorul lui Laplace ar fi fost considerat în sens obișnuit, funcția $\frac{1}{R}$ ar fi fost armonică, iar ecuația lui Poisson nu ar fi fost verificată.

Deoarece distribuțiile E și V sînt distribuții regulate, rezultă că operatorul grad în sensul teoriei distribuțiilor coincide cu operatorul corespunzător în sens obișnuit; putem deci scrie

$$E_x = q\frac{x}{R^3},\quad E_y = q\frac{y}{R^3},\quad E_z = q\frac{z}{R^3}. \tag{5.3.5}$$

5.3.1.2. Caz unidimensional

Fie acum ecuația unidimensională a lui Poisson pentru potențialul unei sarcini electrice

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2} = -4\pi\rho(x). \tag{5.3.6}$$

Pentru o sarcină electrică q, situată în origine pe axa Ox, putem scrie densitatea liniară sub forma (3.4.4); potențialul corespunzător va verifica deci ecuația

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2} = -4\pi q\delta(x).$$

Ținînd seama de (1.2.34) și (1.2.34′), găsim

$$V(x) = -2\pi q|x|; \tag{5.3.7}$$

de asemenea, relația (5.3.3) ne permite să scriem

$$E = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = 2\pi q\,|x|' = \begin{cases} -2\pi q & \text{pentru } x < 0 \\ 2\pi q & \text{pentru } x \geqslant 0 \end{cases} =$$

$$= 2\pi q\,[2\,\theta(x) - 1] = 2\pi q\ \mathrm{sgn}\ x. \tag{5.3.8}$$

5.3.1.3. Caz bidimensional

În caz bidimensional, ecuația lui Poisson capătă forma

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -4\pi\rho(x, y). \tag{5.3.9}$$

Considerînd o sarcină electrică q, situată în originea axelor de coordonate Oxy, putem scrie densitatea superficială sub forma (3.4.6); potențialul acestui cîmp electrostatic va trebui deci să verifice ecuația

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -4\pi q\, \delta(x, y).$$

Ținînd seama de (1.4.36), obținem

$$V(x, y) = 2\, q \ln \frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{5.3.10}$$

Pentru vectorul intensitate **E** putem scrie

$$E_x = 2\, q \frac{x}{r}, \quad E_y = 2q \frac{y}{r}; \tag{5.3.11}$$

funcțiile E_x și E_y sînt local integrabile, deci definesc distribuții regulate. Cu toate că E_x^2 și E_y^2 nu sînt funcții local integrabile, ca și suma lor

$$E_x^2 + E_y^2 = \frac{4q^2}{r^2},$$

totuși expresia

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$$

reprezintă o funcție local integrabilă, căreia îi corespunde o distribuție regulată. Intensitatea cîmpului electric bidimensional va fi dată de

$$E = \frac{2q}{r}. \tag{5.3.12}$$

5.3.1.4. Exemple

Fie cazul unui strat electric simplu avînd densitatea superficială σ constantă în planul Oxy ($z = 0$) (v. fig. 3.28); ținînd seama de formula (3.4.14), putem scrie densitatea volumică

$$\rho(x, y, z) = \sigma\delta(z). \tag{5.3.13}$$

Potenţialul cîmpului electrostatic corespunzător va trebui să verifice ecuaţia

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-4\pi\sigma\delta(z), \qquad (5.3.14)$$

care ne conduce la

$$V(x, y, z)=-2\pi\sigma|z|, \qquad (5.3.15)$$

ca în 5.3.1.2. Obţinem, de asemenea,

$$E_x=E_y=0, \qquad (5.3.16)$$

$$E_z=\begin{cases}-2\pi\sigma \text{ pentru } z<0\\ 2\pi\sigma \text{ pentru } z\geqslant 0\end{cases}=2\pi\sigma[2\theta(z)-1]=2\pi\sigma\,\mathrm{sgn}\,z.$$

În felul acesta, obţinem un rezultat analog cu cel din cazul mediului unidimensional considerat în 5.3.1.2.

Fie acum un dipol electric de moment D, situat în originea axelor de coordonate, după direcţia de versor $\mathbf{u}$; conform formulei (3.4.12), densitatea volumică a acestui dipol va fi

$$\rho(x, y, z)=-D\frac{\partial}{\partial u}\delta(x, y, z). \qquad (5.3.17)$$

Aplicînd operatorul $\frac{\partial}{\partial u}$ relaţiei (1.4.35) şi observînd că acest operator este permutabil cu operatorul lui Laplace, obţinem

$$\frac{\partial}{\partial u}\Delta\left(\frac{1}{R}\right)=\Delta\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{R}\right)\right]=-4\pi\frac{\partial}{\partial u}\delta(x, y, z);$$

în acest caz, ecuaţia (5.3.4)cu (5.3.17) ne determină potenţialul unui cîmp electrostatic, corespunzător unui dipol electric aplicat în origine, sub forma

$$V(x, y, z)=-D\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{R}\right)=-D\,\mathbf{u}\cdot\mathrm{grad}\,\frac{1}{R}. \qquad (5.3.18)$$

Această funcţie este local integrabilă, aşa încît distribuţia generată de (5.3.18) este o distribuţie regulată.

Scanned with OKEN Scanner

5.3.2. *Cazul unui strat electric pe o suprafaţă*

5.3.2.1. Strat electric simplu pe o suprafaţă

Fie un strat electric simplu de densitate superficială $\sigma(x, y, z)$, situat pe o suprafaţă S (v. fig. 3.25, *b*); densitatea volumică corespunzătoare va fi dată de formula (3.4.14), iar ecuaţia care dă potenţialul cîmpului electrostatic generat va fi

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-4\pi\sigma(x, y, z)\delta(S). \quad (5.3.19)$$

Ţinînd seama de soluţia fundamentală (2.3.77) a ecuaţiei lui Poisson (5.3.19), putem scrie soluţia acestei ecuaţii sub forma

$$V(x, y, z)=-\frac{1}{4\pi R}*[-4\pi\sigma(x, y, z)\delta(S)],$$

unde am folosit produsul de convoluţie; în definitiv

$$V(x, y, z)=\frac{1}{R}*\sigma(x, y, z)\delta(S). \quad (5.3.20)$$

Observăm că

$$(f(x, y, z)*\sigma(x, y, z)\ \delta(S),\ \varphi(x, y, z))=$$

$$=(f(x, y, z)\times\sigma(u, v, w)\ \delta(S),\ \varphi(x+u, y+v, z+w))=$$

$$=(\sigma(u, v, w)\ \delta(S),\ (f(x, y, z),\ \varphi(x+u, y+v, z+w))=$$

$$=\int_S\sigma(u, v, w)\,(f(x, y, z),\ \varphi(x+u, y+v, z+w))\,dS=$$

$$=\int_S\sigma(u, v, w)\left[\int_{R^3}f(x, y, z)\,\varphi(x+u, y+v, z+w)\,dx\,dy\,dz\right]dS=$$

$$=\int_S\int_{R^3}\sigma(u, v, w)f(x-u, y-v, z-w)\ \varphi(x, y, z)\,dS\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\int_{R^3}\varphi(x, y, z)\left[\int_S\sigma(u, v, w)f(x-u, y-v, z-w)\,dS\right]dx\,dy\,dz=$$

$$=\left(\int_S\sigma(u, v, w)\ f(x-u, y-v, z-w)\ dS,\ \varphi(x, y, z)\right),$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $f(x, y, z)$ este o funcţie local integrabilă iar $\varphi(x, y, z) \in$ $\in K(R^3)$ este o funcţie fundamentală; obţinem formula

$$f(x,y,z) * \sigma(x,y,z)\ \delta(S) = \int_S \sigma(u,v,w) f(x-u, y-v, z-w) \mathrm{d}S, \tag{5.3.21}$$

unde $\mathrm{d}S$ se exprimă în raport cu variabilele u, v şi w. În acest caz, putem scrie

$$V(x, y, z) = \int_S \frac{\sigma(u, v, w)}{\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2}} \mathrm{d}S. \tag{5.3.22}$$

5.3.2.2. Strat electric dublu pe o suprafaţă

Să considerăm un strat electric dublu de moment $\mu(x, y, z)$, situat pe suprafaţa S (v. fig. 3.26, *b*); densitatea volumică corespunzătoare va fi dată de formula (3.4.25), iar potenţialul cîmpului electrostatic generat va fi dat de ecuaţia

$$\Delta V(x, y, z) = 4\pi \frac{\partial}{\partial n} [\mu(x, y, z)\ \delta(S)], \tag{5.3.23}$$

unde $\mathbf{n}$ este versorul normalei interioare la suprafaţă.

Folosind soluţia fundamentală (2.3.77), ca şi în cazul precedent, obţinem potenţialul

$$V(x, y, z) = -\frac{1}{R} * \frac{\partial}{\partial n} [\mu(x, y, z)\ \delta(S)]; \tag{5.3.24}$$

de aici rezultă

$$V(x, y, z) = -\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{R} * \mu(x, y, z)\ \delta(S)\right] =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) * \mu(x, y, z)\ \delta(S),$$

iar formula (5.3.21) ne permite să scriem

$$V(x, y, z) =$$

$$= -\int_S \mu(u, v, w) \frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2}}\right] \mathrm{d}S, \tag{5.3.25}$$

derivata după normala $\mathbf{n}$ exprimîndu-se în raport cu variabilele u, v şi w.

Scanned with OKEN Scanner

APLICAȚII ALE TEORIEI DISTRIBUȚIILOR ÎN ELECTROTEHNICĂ

6.1. Intensitatea și sarcina curentului electric. Impedanța și admitanța circuitelor electrice

6.1.1. *Intensitatea și sarcina curentului electric*

6.1.1.1. Considerații generale

Fie un conductor de secțiune A, prin care trece un curent electric de *sarcină* $q = q(t)$, la momentul $t \geqslant t_0$, unde t_0 reprezintă momentul inițial de la care începe să circule curentul electric prin conductor; la un moment $t < t_0$ nu trece nici un curent electric. *Intensitatea curentului electric* va fi dată de relația

$$i(t) = \frac{\widetilde{\mathrm{d}}q(t)}{\mathrm{d}t}, \tag{6.1.1}$$

unde derivata este considerată în sens obișnuit, relația fiind valabilă pentru $t \geqslant t_0$.

Printr-o prelungire la stînga cu valori nule, vom introduce funcția

$$\bar{q}(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t < t_0 \\ q(t) & \text{pentru } t \geqslant t_0 \end{cases} = \theta(t - t_0)q(t), \tag{6.1.2}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $\theta(t)$ este distribuţia lui Heaviside (fig. 6.1). Derivînd în sensul teoriei distribuţiilor, rezultă

$$\bar{i}(t) = \frac{d\bar{q}(t)}{dt} = \theta(t - t_0)\,\tilde{q}'(t) + q(t)\,\delta(t - t_0) =$$

$$= \theta(t - t_0)\,\tilde{q}'(t) + q(t_0)\,\delta(t - t_0), \qquad (6.1.3)$$

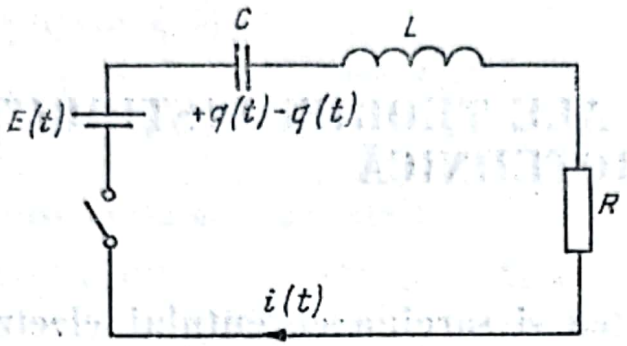


Fig. 6.1.

funcţia $q(t)$ fiind de clasa C^1; observăm că $\bar{i}(t) = \tilde{q}'(t) = i(t)$ pentru $t > t_0$, distribuţia (6.1.3) reprezentînd astfel, în mod corect, intensitatea curentului electric. În particular, pentru

$$q(t) = q_0 = \text{const}, \quad t \geqslant t_0, \qquad (6.1.4)$$

obţinem

$$\bar{i}(t) = q_0\,\delta(t - t_0).$$

În studiul circuitelor electrice joacă un rol important cele două *legi ale lui Kirchhoff*:

a) Suma intensităţilor curenţilor care se întîlnesc într-un nod al unor circuite electrice este egală cu zero. Intensitatea curentului ce intră în nod se afectează cu semnul plus, iar intensitatea curentului ce iese din nod se afectează cu semnul minus.

b) În orice circuit închis (contur închis) suma *forţelor electromotoare* care iau naştere este egală cu suma *căderilor de potenţial.*

Datorită *rezistenţei* R a unui conductor se obţine o cădere de potenţial dată de relaţia

$$\bar{E}_R(t) = R\,\bar{i}(t); \qquad (6.1.5)$$

aceasta constituie *legea lui Ohm*. De asemenea, prin trecerea unui curent electric de intensitate $\bar{i}(t)$ printr-o bobină se obţine o cădere de potenţial exprimată prin

$$\bar{E}_L(t) = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{i}(t), \qquad (6.1.5')$$

unde coeficientul L este *inductanţa bobinei*. În sfîrşit, căderea de potenţial datorită unui condensator de *capacitate* C va fi

$$\bar{E}_C(t) = \frac{1}{C}\bar{q}(t). \qquad (6.1.5'')$$

Toate aceste căderi de potenţial, determinate de rezistenţa activă R, de rezistenţa inductivă L şi de rezistenţa capacitivă C, sînt distribuţii nule pentru $t < t_0$; prin urmare, suportul acestor distribuţii este semidreapta $[0, \infty)$, putînd astfel aplica şi transformata Laplace, pe lîngă transformata Fourier.

Putem scrie o relaţie analoagă cu relaţia (6.1.5') în cazul *inductanţei mutuale* a doua circuite. Fie astfel două bobine legate inductiv între ele, cu coeficienţii de inducţie mutuală L_{12}, respectiv L_{21}, corespunzînd intensităţilor $\bar{i}_1$, respectiv $\bar{i}_2$; forţele electromotoare (căderile de potenţial vor fi

$$\bar{E}_1(t) = L_{12}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{i}_2(t), \quad \bar{E}_2(t) = L_{21}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{i}_1(t). \qquad (6.1.6)$$

Admitem că

$$L_{12} = L_{21} = M. \qquad (6.1.7)$$

6.1.1.2. **Studiul unui circuit** R.L.C.

O aplicaţie importantă a algebrei de convoluţie K'_+ o constituie studiul unui *circuit* R.L.C., format dintr-o *rezistenţă*, o *inductanţă* (bobină) şi o *capacitate* (condensator), legate în serie cu un generator avînd forţa electromotoare $E(t)$ (fig. 6.2).

Scanned with OKEN Scanner

Admiţînd condiţii iniţiale omogene (nule), aplicăm acestui circuit închis legea b) a lui Kirchoff şi ţinem seama de relaţiile (6.1.5) — (6.1.5″); obţinem

$$\bar{E}(t) = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{i}(t) + R\bar{i}(t) + \frac{1}{C}\bar{q}(t), \qquad (6.1.8)$$

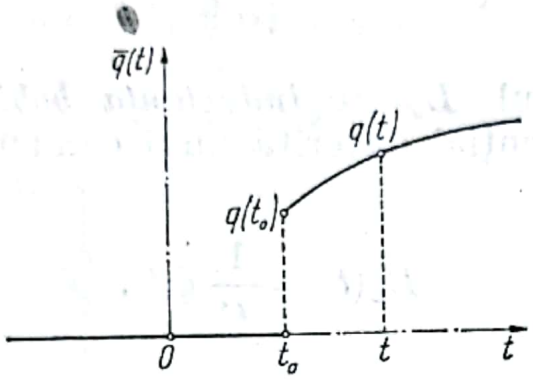


Fig 6.2.

unde $\bar{E}(t)$ este distribuţia definită de funcţia

$$\bar{E}(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t < t_0 \\ E(t) & \text{pentru } t \geqslant t_0 \end{cases} = \theta(t - t_0)E(t), \qquad (6.1.9)$$

momentul iniţial de închidere a circuitului fiind $t = 0$, iar $E(t)$ o funcţie ce reprezintă forţa electromotoare definită pentru $t \geqslant t_0$.

Ecuaţia diferenţială (6.1.8) cuprinde distribuţiile necunoscute $\bar{q}(t)$ şi $\bar{i}(t)$, care depind de forţa electromotoare $\bar{E}(t)$ prin intermediul coeficienţilor R, L şi C; ţinînd seama de relaţia (6.1.3), găsim ecuaţia diferenţială

$$L\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\bar{q}(t) + R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{q}(t) + \frac{1}{C}\bar{q}(t) = \bar{E}(t), \qquad (6.1.10)$$

care cuprinde numai distribuţia necunoscută $\bar{q}(t)$. Introducînd operatorul diferenţial

$$\mathrm{D}_q = L\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}, \qquad (6.1.11)$$

putem scrie ecuaţia (6.1.10) sub forma

$$\mathrm{D}_q\bar{q}(t) = \bar{E}(t). \qquad (6.1.12)$$

Această ecuație devine

$$D_q\,\delta(t) * \bar{q}(t) = \bar{E}(t) \qquad (6.1.12')$$

în algebra de convoluție K'_+. După cum s-a arătat în 2.2.1.2, soluția elementară a acestei ecuații va verifica relațiile

$$\mathcal{E}(t) = [D_q\delta(t)]^{-1},\ \mathcal{E}^{-1}(t) = D_q\delta(t). \qquad (6.1.13)$$

Soluția $\mathcal{E}(t) \in K'_+$ este unică și putem scrie soluția ecuației (6.1.12') sub forma

$$\bar{q}(t) = \mathcal{E}(t) * \bar{E}(t). \qquad (6.1.14)$$

S-au obținut astfel relațiile funcționale (6.1.12') și (6.1.14) între forța electromotoare $\bar{E}(t)$ și sarcina $\bar{q}(t)$.

6.1.2. *Impedanța și admitanța circuitelor electrice*

După cum am văzut, soluția elementară $\mathcal{E}(t) \in K'_+$ ne permite, cu ajutorul relației (6.1.14), să determinăm sarcina $\bar{q}(t)$ atunci cînd cunoaștem forța electromotoare $\bar{E}(t)$. De asemenea, inversa sa $\mathcal{E}^{-1}(t) \in K'_+$ ne permite să determinăm forța electromotoare atunci cînd este dată sarcina electrică, cu ajutorul relației

$$\bar{E}(t) = \mathcal{E}^{-1}(t) * \bar{q}(t). \qquad (6.1.15)$$

33

6.1.2.1. Impedanța și admitanța generalizată a circuitelor electrice

Prin definiție, *impedanța generalizată relativă la sarcina* $\bar{q}(t)$ a unui circuit electric va fi dată de

$$Z_q(t) = D_q\delta(t) = \mathcal{E}^{-1}(t) = L\,\delta''(t) + R\,\delta'(t) + \frac{1}{C}\,\delta(t); \qquad (6.1.16)$$

în acest caz, forța electromotoare se va scrie sub forma

$$\bar{E}(t) = Z_q(t) * \bar{q}(t). \qquad (6.1.17)$$

Scanned with OKEN Scanner

În mod analog, *admitanța generalizată relativă la sarcina* $\bar{q}(t)$ a unui circuit electric se va defini prin relația

$$A_q(t) = Z_q^{-1}(t) = \mathcal{E}(t) = [\mathrm{D}_q\delta(t)]^{-1} =$$

$$= \left[L\delta''(t) + R\delta'(t) + \frac{1}{C}\,\delta(t)\right]^{-1},$$

iar sarcina electrică este dată de

$$\bar{q}(t) = A_q(t) * \bar{E}(t). \qquad (6.1.17')$$

Între impedanța generalizată și admitanța generalizată, ambele relative la sarcina $\bar{q}(t)$, are loc relația

$$Z_q(t) * A_q(t) = \delta(t). \qquad (6.1.18)$$

Observînd că soluția elementară $\mathcal{E}(t) \in K'_+$ este unică, rezultă că circuitul dat are o singură admitanță generalizată relativă la sarcina $\bar{q}(t)$.

Impedanța generalizată $Z_q(t)$ și admitanța generalizată $A_q(t)$ au fost introduse pentru un circuit R.L.C. relativ la sarcina $\bar{q}(t)$, pusă în evidență în ecuația (6.1.10). Acum vom elimina sarcina $\bar{q}(t)$ între relațiile (6.1.3) și (6.1.8), pentru a obține o ecuație în $\bar{i}(t)$; în felul acesta vom introduce o impedanță generalizată și o admitanță generalizată relative la intensitatea $\bar{i}(t)$.

Distribuțiile $\theta(t)$ și $\bar{i}(t)$ aparțin algebrei de convoluție K'_+, deci putem scrie produsul

$$\theta(t) * \bar{i}(t) = \theta(t) * \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\bar{q}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,[\theta(t) * \bar{q}(t)] =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\theta(t) * \bar{q}(t) = \delta(t) * \bar{q}(t),$$

de unde

$$\theta(t) * \bar{i}(t) = \bar{q}(t). \qquad (6.1.19)$$

Plecînd de la relațiile (6.1.3) și (6.1.8), obținem ecuația

$$L\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\bar{i}(t) + R\bar{i}(t) + \frac{1}{C}\,\theta(t) * \bar{i}(t) = \bar{E}(t), \qquad (6.1.20)$$

Scanned with OKEN Scanner

care este o ecuație integrodiferențială dacă $\bar{i}(t)$ este o distribuție regulată. Introducînd operatorul

$$\mathrm{D}_i = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + R + \frac{1}{C}\,\theta(t)*, \qquad (6.1.21)$$

putem scrie ecuația (6.1.20) sub forma

$$\mathrm{D}_i\bar{i}(t) = \bar{E}(t) \qquad (6.1.22)$$

sau sub forma ecuației de convoluție

$$\mathrm{D}_i\delta(t)*\bar{i}(t) = \bar{E}(t),$$

dacă observăm că

$$\mathrm{D}_i\delta(t) = L\delta'(t) + R\delta(t) + \frac{1}{C}\,\theta(t)*\delta(t) =$$

$$= L\delta'(t) + R\delta(t) + \frac{1}{C}\,\theta(t).$$

Impedanța generalizată relativă la intensitatea $\bar{i}(t)$ va fi definită prin relația

$$Z_i(t) = \mathrm{D}_i\delta(t) = L\delta'(t) + R\delta(t) + \frac{1}{C}\,\theta(t), \qquad (6.1.23)$$

iar *admitanța generalizată relativă la intensitatea* $\bar{i}(t)$ va fi

$$A_i(t) = Z_i^{-1}(t) = [\mathrm{D}_i\delta(t)]^{-1} = \left[L\delta'(t) + R\delta(t) + \frac{1}{C}\,\theta(t)\right]^{-1};$$

putem scrie relația

$$Z_i(t)*A_i(t) = \delta(t). \qquad (6.1.24)$$

Impedanța generalizată și admitanța generalizată, relative la intensitatea $\bar{i}(t)$, sînt univoc determinate în algebra de convoluție K'_+; putem scrie

$$\bar{E}(t) = Z_i(t)*\bar{i}(t), \quad \bar{i}(t) = A_i(t)*\bar{E}(t). \qquad (6.1.25)$$

Impedanța generalizată $Z_i(t)$ se notează $Z(t)$ și se numește *impedanța circuitului* R.L.C., fără a mai specifica că este relativă la intensitatea $\bar{i}(t)$; în mod analog, admitanța

Scanned with OKEN Scanner

generalizată $A_i(t)$ se notează $A(t)$ şi se numeşte *admitanţa circuitului* R.L.C.

Relaţiile (6.1.17) şi (6.1.25), împreună cu (6.1.3) ne permit să scriem

$$Z_q(t) * \bar{q}(t) = Z_i(t) * \bar{i}(t) = Z_i(t) * \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{q}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Z_i(t) * \bar{q}(t),$$

de unde rezultă relaţia

$$Z_q(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Z_i(t); \qquad (6.1.26)$$

în mod analog

$$A_i(t) * \bar{E}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{q}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[A_q(t) * \bar{E}(t)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A_q(t) * \bar{E}(t),$$

aşa încît putem scrie

$$A_i(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A_q(t).$$

6.1.2.2. Impedanţa şi admitanţa operaţională a circuitelor electrice

Transformata Laplace a impedanţei generalizate relative la sarcina $\bar{q}(t)$ se va scrie sub forma

$$\tilde{Z}_q(p) = L[Z_q(t)] = Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}, \qquad (6.1.27)$$

unde p este noua variabilă complexă, definind *impedanţa operaţională relativă la sarcina* $\bar{q}(t)$; în mod analog, admitanţa generalizată relativă la sarcina $\bar{q}(t)$ ne conduce la *admitanţa operaţională relativă la sarcina* $\bar{q}(t)$, prin relaţia

$$\tilde{A}_q(p) = L[A_q(t)] = \frac{1}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Aplicînd transformata Laplace relaţiilor (6.1.17), (6.1.17′), putem scrie

$$\begin{aligned} \tilde{\bar{E}}(p) &= \tilde{Z}_q(p)\tilde{\bar{q}}(p), \\ \tilde{\bar{q}}(p) &= \tilde{A}_q(p)\tilde{\bar{E}}(p); \end{aligned} \tag{6.1.28}$$

în mod analog, avem relaţia

$$\tilde{Z}_q(p)\tilde{A}_q(p) = 1. \tag{6.1.29}$$

De asemenea, transformata Laplace a impedanţei generalizate relative la intensitatea $\bar{i}(t)$ se va scrie sub forma

$$\tilde{Z}_i(p) = L\,[Z_i(t)] = Lp + R + \frac{1}{Cp}, \tag{6.1.30}$$

definind astfel *impedanţa operaţională relativă la intensitatea* $\bar{i}(t)$; în mod analog, admitanţa generalizată relativă la intensitatea $\bar{i}(t)$ ne conduce la *admitanţa operaţională relativă la intensitatea* $\bar{i}(t)$, prin relaţia

$$\tilde{A}_i(p) = L\,[A_i(t)] = \frac{1}{Lp + R + \dfrac{1}{Cp}}.$$

Se verifică relaţia

$$\tilde{Z}_i(p)\,\tilde{A}_i(p) = 1; \tag{6.1.31}$$

de asemenea, relaţiile (6.1.25) ne conduc la

$$\begin{aligned} \tilde{\bar{E}}(p) &= \tilde{Z}_i(p)\,\tilde{\bar{i}}(p), \\ \tilde{\bar{i}}(p) &= \tilde{A}_i(p)\,\tilde{\bar{E}}(p). \end{aligned} \tag{6.1.32}$$

Menţionăm şi relaţiile

$$\tilde{Z}_q(p) = p\tilde{Z}_i(p), \qquad \tilde{A}_i(p) = p\tilde{A}_q(p). \tag{6.1.33}$$

Scanned with OKEN Scanner

Observăm că relaţia (6.1.32) este analoagă, din punct de vedere formal, legii lui Ohm (6.1.5); în felul acesta, $\tilde{Z}_i(p)$ se mai notează $\tilde{Z}(p)$, numindu-se *impedanţa operaţională a circuitului*, pe cînd $\tilde{A}_i(p)$ se mai notează $\tilde{A}(p)$, numindu-se *admitanţa operaţională a circuitului*, fără a mai specifica că este relativă la intensitatea $i(t)$.

Impedanţa operaţională rezistivă corespunzătoare rezistenţei active R va fi

$$\tilde{Z}_R(p) = R, \tag{6.1.34}$$

ceea ce justifică analogia dintre relaţia (6.1.32) şi legea lui Ohm; în mod analog, rezistenţa inductivă L ne conduce la *impedanţa operaţională inductivă*

$$\tilde{Z}_L(p) = Lp,$$

iar rezistenţa capacitivă C ne dă *impedanţa operaţională capacitivă*

$$\tilde{Z}_C(p) = \frac{1}{Cp}.$$

În acest caz, impedanţa operaţională a circuitului va fi

$$\tilde{Z}(p) = \tilde{Z}_R(p) + \tilde{Z}_L(p) + \tilde{Z}_C(p). \tag{6.1.35}$$

Ţinînd seama de relaţia (6.1.32), putem scrie

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{E}}_R(p) &= \tilde{Z}_R(p)\,\tilde{\tilde{i}}(p), \\ \tilde{\tilde{E}}_L(p) &= \tilde{Z}_L(p)\,\tilde{\tilde{i}}(p), \\ \tilde{\tilde{E}}_C(p) &= \tilde{Z}_C(p)\,\tilde{\tilde{i}}(p) \end{aligned} \tag{6.1.36}$$

şi

$$\tilde{\tilde{E}}(p) = \tilde{\tilde{E}}_R(p) + \tilde{\tilde{E}}_L(p) + \tilde{\tilde{E}}_C(p). \tag{6.1.37}$$

În felul acesta s-a pus în evidenţă semnificaţia fiecărui termen al transformatei Laplace (6.1.30).

Scanned with OKEN Scanner

Fie $\tilde{Z}_1(p)$, $\tilde{Z}_2(p)$ impedanţele operaţionale a două elemente legate în serie; putem scrie

$$\tilde{\bar{E}}_1(p) = \tilde{Z}_1(p)\,\tilde{\bar{i}}(p), \quad \tilde{\bar{E}}_2(p) = \tilde{Z}_2(p)\,\tilde{\bar{i}}(p).$$

Dar

$$\bar{E}(t) = \bar{E}_1(t) + \bar{E}_2(t),$$

deci

$$\tilde{\bar{E}}(p) = \tilde{\bar{E}}_1(p) + \tilde{\bar{E}}_2(p) = [\tilde{Z}_1(p) + \tilde{Z}_2(p)]\,\tilde{\bar{i}}(p).$$

Prin urmare, *formula de compunere a impedanţelor operaţionale a două elemente legate în serie* va fi

$$\tilde{Z}(p) = \tilde{Z}_1(p) + \tilde{Z}_2(p). \tag{6.1.38}$$

În mod analog, *impedanţa operaţională a două elemente legate în paralel* va fi dată de relaţia

$$\frac{1}{\tilde{Z}(p)} = \frac{1}{\tilde{Z}_1(p)} + \frac{1}{\tilde{Z}_2(p)}, \tag{6.1.39}$$

care corespunde relaţiei

$$\tilde{A}(p) = \tilde{A}_1(p) + \tilde{A}_2(p),$$

valabilă pentru admitanţa operaţională.

6.1.2.3. Exemple

Fie, de exemplu, circuitul din fig. 6.3. Observăm că rezistenţa R şi capacitatea C sînt legate în paralel, aşa încît impedanţa operaţională corespunzătoare va fi dată de relaţia

$$\frac{1}{\tilde{Z}_1(p)} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{1}{Cp}} = Cp + \frac{1}{R},$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde

$$\tilde{Z}_1(p) = \frac{1}{Cp + \dfrac{1}{R}}; \qquad (6.1.40)$$

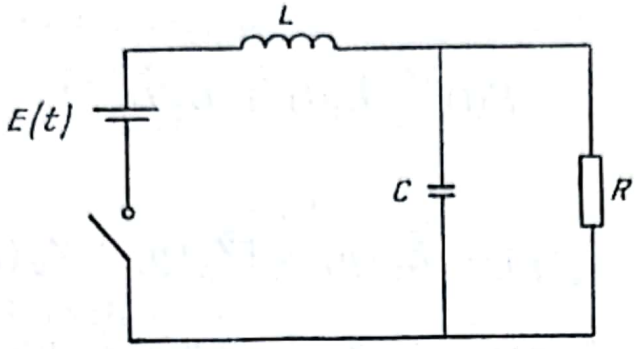


Fig. 6.3.

acest ansamblu este legat în serie cu inductanţa L, pentru care

$$\tilde{Z}_2(p) = Lp.$$

Prin urmare, impedanţa operaţională a circuitului dat va fi

$$\tilde{Z}(p) = Lp + \frac{1}{Cp + \dfrac{1}{R}} + \frac{RLCp^2 + Lp + R}{Rcp + 1}. \qquad (6.1.41)$$

În mod analog, vom considera circuitul din fig. 6.4. În acest caz, observăm că rezistenţa R şi impedanţa L

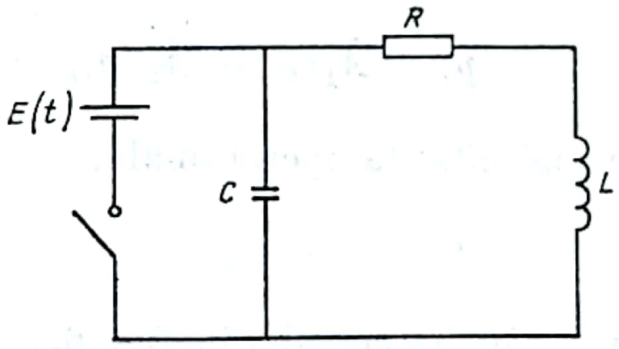


Fig. 6.4.

sînt legate în serie; acest ansamblu este apoi legat în paralel cu capacitatea C. Vom putea scrie

$$\frac{1}{\tilde{Z}(p)} = \frac{1}{\dfrac{1}{Cp}} + \frac{1}{R + Lp} = Cp + \frac{1}{R + Lp},$$

de unde

$$\tilde{Z}(p) = \frac{1}{Cp + \dfrac{1}{R+Lp}} = \frac{Lp + R}{LCp^2 + RCp + 1}. \quad (6.1.42)$$

6.1.3. *Frecvenţe negative*

6.1.3.1. Rezultate generale

Un rol important în studiul mărimilor electrice îl joacă funcţiile periodice $\cos(\omega t - \varphi)$ şi $\sin(\omega t - \varphi)$. Astfel, dacă considerăm un circuit format dintr-o rezistenţă R şi o inductanţă L, iar tensiunea electromotoare aplicată este $E(t) = E_0 \sin \omega t$, atunci intensitatea curentului se va exprima sub forma $i(t) = i_0 \sin(\omega t - \varphi)$, unde constantele i_0 şi φ se determină în funcţie de rezistenţa R, inductanţa L, pulsaţia ω şi forţa electromotoare E_0.

Pentru unitatea studiului, vom folosi funcţii complexe; în acest scop, unei funcţii reale de variabilă reală i se asociază, într-un anumit mod, o funcţie complexă de variabilă reală. Fie astfel funcţia

$$x(t) = \cos \omega t; \quad (6.1.43)$$

din punct de vedere cinematic, această funcţie exprimă mişcarea unui punct material pe axa Ox, de perioadă $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ şi de frecvenţă $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$.

Fie acum un punct material $M(x, y)$ în mişcare circulară uniformă în sens direct, cu viteza unghiulară ω, cercul avînd raza egală cu unitatea (fig. 6.5); proiecţiile M' şi M'' ale punctului M pe axele de coordonate execută mişcări oscilatorii cu aceeaşi frecvenţă $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$.

Ecuaţiile de mişcare corespunzătoare vor fi

$$x(t) = \cos \omega t, \quad y(t) = \sin \omega t, \quad (6.1.44)$$

Scanned with OKEN Scanner

admiţînd că la momentul iniţial ($t = 0$) punctul se găseşte pe axa Ox (diferenţa de fază φ este nulă).

Dacă în locul planului Oxy considerăm planul complex, atunci vectorului $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}$ de modul unitate îi va corespunde o funcţie complexă de variabilă reală, respectiv

$$f(t) = \cos \omega t + i \sin \omega t = e^{i\omega t};$$

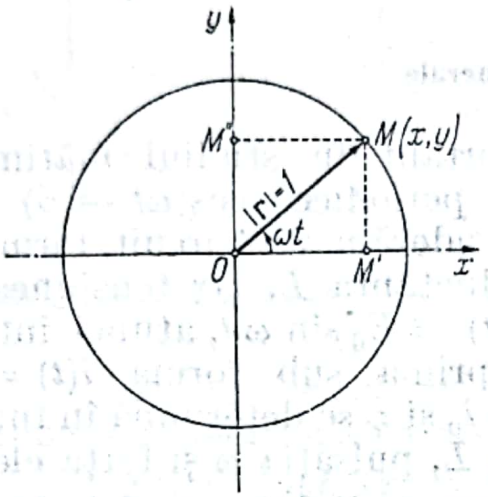


Fig. 6.5.

în felul acesta funcţia reală $\cos \omega t$ se va exprima cu ajutorul a două funcţii complexe sub forma

$$\cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}), \qquad (6.1.45)$$

iar funcţia reală $\sin \omega t$ va fi

$$\sin \omega t = \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}), \qquad (6.1.45')$$

unde i este unitatea imaginară.

În felul acesta, observăm că funcţiei complexe $e^{-i\omega t}$ îi corespunde o mişcare circulară uniformă pe un cerc de rază unitate, în sensul mişcării acelor unui ceasornic, faza mişcării fiind $-\omega t$, ceea ce ne conduce la considerarea *frecvenţelor negative* $f = -\frac{\omega}{2\pi}$. Prin urmare, funcţia $\cos \omega t$, de exemplu, se poate obţine prin suprapunerea rotirilor uniforme a doi vectori cu aceeaşi viteză unghiulară,

dar de sens contrar; mişcarea vectorului în sens invers acelor unui ceasornic generează o frecvenţă pozitivă, iar mişcarea vectorului în sensul mişcării acelor unui ceasornic (sens negativ) o *frecvenţă negativă.*

Noţiunea de frecvenţă negativă, introdusă formal mai sus, joacă un rol important în diferite probleme de electrotehnică. În această ordine de idei, vom introduce noţiunea respectivă şi pe altă cale.

Fie astfel o funcţie $f(t)$ care îndeplineşte condiţiile lui Dirichlet (este periodică şi parţial continuă, avînd un număr finit de puncte de discontinuitate de prima speţă pe fiecare interval); în acest caz putem reprezenta funcţia sub forma unei serii Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t), \quad (6.1.46)$$

unde

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t), \quad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cos n\omega t \, dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \sin n\omega t \, dt, \quad n \in N_0,$$

T fiind perioada. Observăm că pulsaţia $\omega = \frac{2\pi}{T}$ şi frecvenţa $f = \frac{\omega}{2\pi}$ sînt mărimi pozitive.

Cu ajutorul formulelor lui Euler, de forma (6.1.45), (6.1.45′), această serie Fourier se poate reprezenta sub forma complexă

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}, \quad (6.1.47)$$

unde

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{-in\omega t} \, dt, \; n \in Z.$$

Scanned with OKEN Scanner

Observăm că, în această reprezentare complexă a seriei Fourier, numărul n ia şi valori negative, ceea ce ne conduce la a admite *frecvenţe negative.*

6.1.3.2. Spectrul de frecvenţă al distribuţiei $f(t)$

Necesitatea admiterii existenţei frecvenţelor negative rezultă şi din studiul de frecvenţă al unei distribuţii $f(t)$. Vom introduce astfel transformata Fourier $F(s\,;\,\omega)$ a distribuţiei $f(t)$, cu ajutorul relaţiei

$$(F(s\,;\,\omega),\ \tilde{\varphi}(s)) = 2\pi(f(t),\ \varphi(t)), \qquad (6.1.48)$$

unde am introdus funcţia fundamentală $\varphi(t) \in K(R)$ şi notaţiile $\tilde{\varphi}(s) = F[\varphi(t)]$, $F(s\,;\,\omega) = F[f(t)]$; variabila ω se consideră reală.

Spectrul de frecvenţă al distribuţiei $f(t)$ va fi conjugata complexă $F^*(\omega) = \overline{F}(s\,;\,\omega)$ a transformatei Fourier $F(s\,;\,\omega)$; astfel, dacă

$$F(s\,;\,\omega) = a(s\,;\,\omega) + ib(s\,;\,\omega), \qquad (6.1.49)$$

atunci spectrul distribuţiei $f(t)$ va fi

$$F^*(\omega) = \overline{F}(s\,;\,\omega) = a(s\,;\,\omega) - ib(s\,;\,\omega).$$

Să studiem acum spectrul complex al funcţiei $\cos \omega t$. Deoarece această funcţie nu admite o transformată Fourier în sens clasic, funcţia $\cos \omega t$ nefiind absolut integrabilă, vom considera transformata Fourier în spaţiul distribuţiilor. Ţinînd seama de formula (1.6.31′), putem scrie

$$F^*(\omega) = \overline{F}[\cos \omega t] = \pi[\delta(s - \omega) + \delta(s + \omega)]. \qquad (6.1.50)$$

Această expresie ne arată că spectrul complex al funcţiei $\cos \omega t$ este pur real şi se compune din două linii : una în punctul ω, iar cealaltă în domeniul negativ al frecvenţelor, în punctul $-\omega$, amplitudinea liniilor spectrale fiind π (fig. 6.6, *a*).

Scanned with OKEN Scanner

În ceea ce privește spectrul funcției sin ωt, obținem

$$F^*(\omega) = \overline{F}[\sin \omega t] = -i\pi[\delta(s-\omega) - \delta(s+\omega)],$$

unde am folosit formula (1.6.31); aceasta ne arată că spectrul corespunzător este pur imaginar și este format tot din două linii : una în punctul ω, de amplitudine $-\pi$, iar cealaltă în punctul $-\omega$, de amplitudine π (fig. 6.6, *b*).

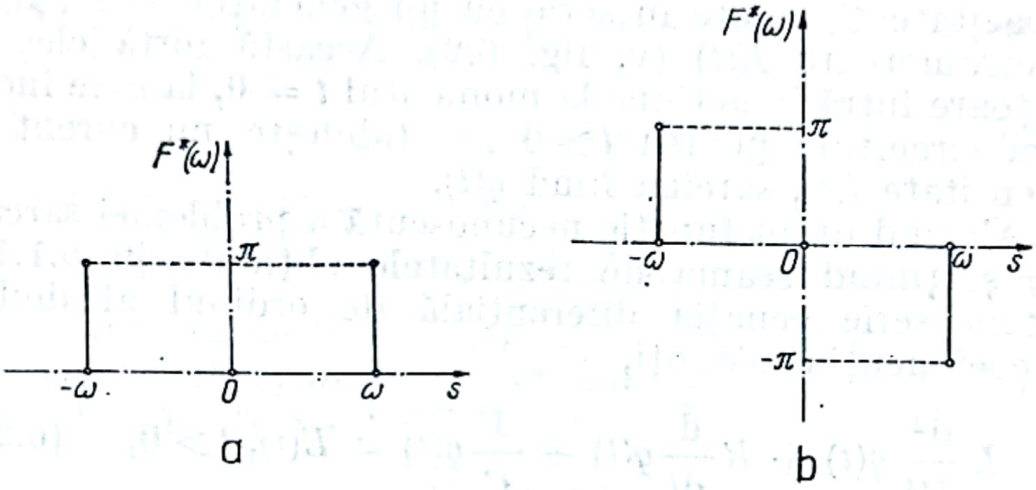


Fig. 6.6.

În mod analog, pentru spectrul funcției $e^{i\omega t}$ rezultă

$$F^*(\omega) = \overline{F}[e^{i\omega t}] = 2\pi\,\delta(s+\omega);$$

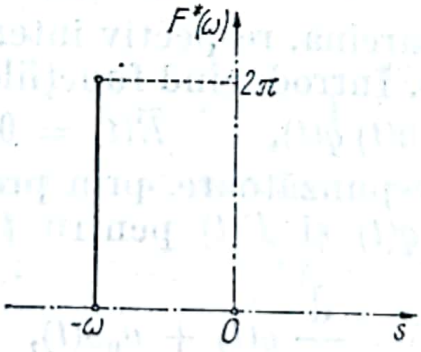


Fig. 6.7.

acest spectru este pur real și este format dintr-o singură linie, de amplitudine 2π, în punctul $-\omega$ (fig. 6.7).

Scanned with OKEN Scanner

6.2. Aplicaţii ale teoriei distribuţiilor la circuite electrice

6.2.1. *Problema Cauchy pentru un circuit* R.L.C.

6.2.1.1. Rezultate generale

Un circuit R.L.C. este constituit dintr-o rezistenţă ohmică R, o bobină de inductanţă L şi un condensator de capacitate C, legate în serie cu un generator avînd forţa electromotoare $E(t)$ (v. fig. 6.2). Această forţă electromotoare intră în acţiune la momentul $t = 0$, la care închidem circuitul; pentru $t > 0$ se stabileşte un curent de intensitate $i(t)$, sarcina fiind $q(t)$.

Alegînd drept funcţie necunoscută a problemei sarcina $q(t)$ şi ţinînd seama de rezultatele obţinute în 6.1.1.2, putem scrie ecuaţia diferenţială de ordinul al doilea, cu coeficienţi constanţi,

$$L\frac{\tilde{\mathrm{d}}^2}{\mathrm{d}t^2}q(t) + R\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}q(t) + \frac{1}{C}q(t) = E(t),\ t > 0, \qquad (6.2.1)$$

corespunzătoare legii b) a lui Kirchhoff.

Problema Cauchy pentru acest circuit constă în determinarea funcţiei $q(t)$, care satisface ecuaţia (6.2.1) pentru $t > 0$ şi condiţiile iniţiale

$$q(t)\,|_{t=0} = q_0,\quad \left.\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = i_0, \qquad (6.2.2)$$

unde q_0 şi i_0 sînt sarcina, respectiv intensitatea curentului la momentul $t = 0$. Introducînd funcţiile

$$\bar{q}(t) = \theta(t)\,q(t), \qquad \bar{E}(t) = \theta(t)\,E(t) \qquad (6.2.3)$$

şi distribuţiile corespunzătoare, prin prelungirea cu valori nule a funcţiilor $q(t)$ şi $E(t)$ pentru $t < 0$, putem scrie

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{q}(t) &= \frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\bar{q}(t) + q_0\delta(t),\\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\bar{q}(t) &= \frac{\tilde{\mathrm{d}}^2}{\mathrm{d}t^2}\bar{q}(t) + i_0\delta(t) + q_0\,\delta'(t),\end{aligned} \qquad (6.2.4)$$

unde am ţinut seama de condiţiile iniţiale (6.2.2); în acest caz, ecuaţia diferenţială (6.2.1) se scrie în distribuţii sub forma

$$L\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\bar{q}(t) + R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{q}(t) + \frac{1}{C}\bar{q}(t) =$$

$$= \bar{E}(t) + (Li_0 + Rq_0)\delta(t) + Lq_0\delta'(t), \qquad (6.2.5)$$

incluzînd şi condiţiile iniţiale (6.2.2).

Cu ajutorul operatorului diferenţial D_q, dat de relaţia (6.1.11), putem scrie ecuaţia (6.2.5) sub forma ecuaţiei de convoluţie în K'_+

$$\mathrm{D}_q\delta(t) * \bar{q}(t) = F(t), \qquad (6.2.6)$$

unde am introdus distribuţia

$$F(t) = \bar{E}(t) + (Li_0 + Rq_0)\,\delta(t) + Lq_0\delta'(t). \qquad (6.2.6')$$

Soluţia elementară $\mathscr{E}(t)$ a acestei ecuaţii verifică relaţiile (6.1.13); în acest caz, soluţia ecuaţiei (6.2.6) cu (6.2.6′) se poate scrie sub forma

$$\bar{q}(t) = \mathscr{E}(t) * F(t), \qquad (6.2.7)$$

unde am introdus produsul de convoluţie în raport cu variabila t.

6.2.1.2. Cazuri de integrare

Soluţia elementară satisface ecuaţia

$$\left[L\delta''(t) + R\delta'(t) + \frac{1}{C}\,\delta(t)\right] * \mathscr{E}(t) = \delta(t); \qquad (6.2.8)$$

aplicînd transformata Laplace, obţinem

$$\left(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}\right)L[\mathscr{E}(t)] = 1,$$

de unde

$$L[\mathscr{E}(t)] = \frac{1}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}} = \frac{1}{L(p - p_1)(p - p_2)} \qquad (6.2.9)$$

Scanned with OKEN Scanner

cu notaţiile $p_1 = -\alpha + \beta$, $p_2 = -\alpha - \beta$ şi $\alpha = \frac{R}{2L}$,

$$\beta = \frac{1}{2L}\sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}\,.$$

Vom considera trei cazuri de integrare :

a) Dacă

$$R^2 > \frac{4L}{C} \tag{6.2.10}$$

vom avea $\beta^2 > 0$, iar β este o mărime reală ; transformata Laplace (6.2.9) se va scrie sub forma

$$L[\mathcal{E}(t)] = \frac{1}{2L\beta}\left(\frac{1}{p - p_1} - \frac{1}{p - p_2}\right),$$

de unde rezultă

$$\mathcal{E}(t) = \frac{\theta(t)}{2L\beta}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = \frac{1}{L\beta}\theta(t)e^{-\alpha t}\operatorname{sh}\beta t. \tag{6.2.11}$$

Soluţia (6.2.7) a ecuaţiei (6.2.6) cu (6.2.6′) rezultă sub forma

$$\bar{q}(t) = \frac{1}{L\beta}\theta(t)e^{-\alpha t}\operatorname{sh}\beta t * [\bar{E}(t) + (Li_0 + Rq_0)\delta(t) + Lq_0\delta'(t)],$$

de unde

$$\bar{q}(t) = \frac{1}{L\beta}\theta(t)e^{-\alpha t}\operatorname{sh}\beta t * \bar{E}(t) + \frac{1}{2L\beta}\theta(t)e^{-\alpha t}[(2Li_0 + Rq_0)\operatorname{sh}\beta t + 2L\beta q_0 \operatorname{ch}\beta t]; \tag{6.2.12}$$

dacă $\bar{E}(t)$ este o funcţie local integrabilă, putem scrie

$$q(t) = \frac{1}{L\beta}\int_0^t e^{-\alpha\tau}E(t-\tau)\operatorname{sh}\beta\tau\,d\tau + \frac{1}{2L\beta}e^{-\alpha t}[(2Li_0 + Rq_0)\operatorname{sh}\beta t + 2L\beta q_0\operatorname{ch}\beta t], \quad t \geqslant 0. \tag{6.2.12′}$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Dacă

$$R^2 < \frac{4L}{C}, \tag{6.2.13}$$

vom avea $\beta^2 < 0$, iar β este o mărime imaginară; introducînd notaţia

$$\beta = i\omega, \quad \omega = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}, \tag{6.2.14}$$

găsim soluţia fundamentală

$$\mathscr{E}(t) = \frac{1}{L\omega}\,\theta(t)e^{-\alpha t}\sin\omega t. \tag{6.2.15}$$

În acest caz, soluţia problemei Cauchy va fi

$$\bar{q}(t) = \frac{1}{L\omega}\,\theta(t)e^{-\alpha t}\sin\omega t * \bar{E}(t) + \frac{1}{2L\omega}\,\theta(t)e^{-\alpha t}[(2Li_0 + Rq_0)\sin\omega t + 2L\omega q_0\cos\omega t]; \tag{6.2.16}$$

dacă $\bar{E}(t)$ este o funcţie local integrabilă, găsim

$$q(t) = \frac{1}{L\omega}\int_0^t e^{-\alpha\tau}E(t-\tau)\sin\omega\tau\,d\tau + \frac{1}{2L\omega}e^{-\alpha t}[(2Li_0 + Rq_0)\sin\omega t + 2L\omega q_0\cos\omega t], \quad t \geqslant 0. \tag{6.2.16'}$$

Acest caz corespunde unui *circuit oscilant.*

c) Dacă

$$R^2 = \frac{4L}{C}, \tag{6.2.17}$$

vom avea $\beta = 0$, astfel încît

$$L[\mathscr{E}(t)] = \frac{1}{L(p+\alpha)^2}; \tag{6.2.18}$$

Scanned with OKEN Scanner

soluţia fundamentală va fi

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{L} t\theta(t)e^{-\alpha t}. \tag{6.2.19}$$

Soluţia problemei la limită se va scrie sub forma

$$\bar{q}(t) = \frac{1}{L} t\theta(t)e^{-\alpha t} * \bar{E}(t) + \frac{1}{2L} \theta(t)e^{-\alpha t}[2Lq_0 + (2Li_0 + Rq_0)t]; \tag{6.2.20}$$

în cazul în care $\bar{E}(t)$ este o funcţie local integrabilă obţinem

$$q(t) = \frac{1}{L}\int_0^t \tau e^{-\alpha\tau} E(t-\tau)d\tau + \frac{1}{2L} e^{-\alpha t}[2Lq_0 + (2Li_0 + Rq_0)t], \; t \geqslant 0. \tag{6.2.20'}$$

6.2.1.3. Caz particular

Să considerăm cazul particular al unor condiţii iniţiale omogene (nule): $q_0 = i_0 = 0$. Să mai admitem că forţa electromotoare $E(t)$ este constantă pentru $t > 0$, deci

$$\bar{E}(t) = E_0\theta(t). \tag{6.2.21}$$

Vom considera pe rînd cele trei cazuri de integrare.

a) Dacă este verificată condiţia (6.2.10), folosim formula (6.2.12′); obţinem

$$q(t) = \frac{E_0}{L\beta}\int_0^t e^{-\alpha\tau} \operatorname{sh}\beta\tau\, d\tau = \frac{E_0}{2L\beta}\left[\frac{e^{-(\alpha+\beta)t}}{\alpha+\beta} - \frac{e^{-(\alpha-\beta)t}}{\alpha-\beta} - \frac{1}{\alpha+\beta} + \frac{1}{\alpha-\beta}\right],$$

de unde

$$q(t) = -\frac{E_0}{L\beta(\alpha^2-\beta^2)}[e^{-\alpha t}(\alpha \operatorname{sh}\beta t + \beta \operatorname{ch}\beta t) - \beta] =$$

$$= -\frac{CE_0}{\beta}[e^{-\alpha t}(\alpha \operatorname{sh}\beta t + \beta \operatorname{ch}\beta t) - \beta], \; t \geqslant 0. \tag{6.2.22}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ţinînd seama de relaţia (6.1.1), rezultă

$$i(t) = \frac{E_0}{L\beta} e^{-\alpha t} \operatorname{sh} \beta t, \quad t \geqslant 0.$$

b) În cazul condiţiei (6.2.13) folosim formula (6.2.16′); rezultă

$$q(t) = \frac{E_0}{L\omega} \int_0^t e^{-\alpha\tau} \sin \omega\tau \, d\tau,$$

astfel încît

$$q(t) = -\frac{E_0}{L\omega(\alpha^2 + \omega^2)} [e^{-\alpha t}(\alpha \sin \omega t + \omega \cos \omega t) - \omega] =$$

$$= -\frac{CE_0}{\omega} [e^{-\alpha t}(\alpha \sin \omega t + \omega \cos \omega t) - \omega], \quad t \geqslant 0. \quad (6.2.23)$$

De asemenea, putem scrie

$$i(t) = \frac{E_0}{L\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega t, \quad t \geqslant 0.$$

c) Dacă este îndeplinită condiţia (6.2.17), trebuie să utilizăm formula (6.2.20′); putem scrie

$$q(t) = \frac{E_0}{L} \int_0^t \tau e^{-\alpha\tau} \, d\tau,$$

de unde

$$q(t) = \frac{E_0}{\alpha L} [1 - (1 + \alpha t) e^{-\alpha t}]. \quad (6.2.24)$$

În mod analog, vom avea

$$i(t) = \frac{E_0}{L} t e^{-\alpha t}.$$

Scanned with OKEN Scanner

6.2. 2.1.Fenomene tranzitorii

Fenomenele considerate pînă în prezent pentru *circuite cu parametri* R, L şi C *concentraţi* (parametri R, L şi C constanţi) sînt în general fenomene în *regim permanent.* Asemenea fenomene pot fi datorate, de exemplu, unei forţe electromagnetice care se aplică la momentul iniţial şi rămîne constantă în timp [de forma (6.2.21)]. La trecerea de la un regim permanent la un alt regim permanent se petrece un *fenomen tranzitoriu* ; de exemplu, fenomenele tranzitorii apar în circuite la conectarea sau deconectarea lor, precum şi la orice variaţie a parametrilor circuitului.

Să facem întîi un studiu al unui circuit R.L.C. supus acţiunii unui impuls de tensiune. Admitem astfel condiţii iniţiale nule ($q_0 = i_0 = 0$), deci lipsa unui curent în circuit ; în aceste condiţii se aplică un impuls de tensiune $E_0\delta(t)$ la momentul iniţial ($t = 0$). Ecuaţia diferenţială (6.2.5) capătă forma

$$L\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\bar{q}(t) + R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{q}(t) + \frac{1}{C}\bar{q}(t) = E_0\delta(t), \quad (6.2.25)$$

care se poate scrie cà o ecuaţie de convoluţie în K'_+

$$\left[L\delta''(t) + R\delta'(t) + \frac{1}{C}\delta(t)\right] * \bar{q}(t) = E_0\delta(t)\,; \quad (6.2.25')$$

prin urmare, soluţia problemei este tocmai soluţia elementară a ecuaţiei (6.2.25′), amplificată cu factorul E_0.

Vom considera pe rînd cele trei cazuri de integrare studiate.

a) Dacă se verifică condiţia (6.2.10), vom avea

$$\bar{q}(t) = \frac{E_0}{L\beta}\,\theta(t)\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{sh}\,\beta t, \quad (6.2.26)$$

de unde

$$q(t) = \frac{E_0}{L\beta}\,\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{sh}\,\beta t,\ t \geqslant 0\,; \quad (6.2.26')$$

Scanned with OKEN Scanner

observăm că

$$\lim_{t\to+0} q(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} q(t) = 0. \tag{6.2.26''}$$

Ţinînd seama de relaţia (6.1.1), rezultă

$$i(t) = \frac{E_0}{L\beta} e^{-\alpha t} (\beta \operatorname{ch} \beta t - \alpha \operatorname{sh} \beta t), \quad t \geqslant 0; \tag{6.2.27}$$

la limită, putem scrie

$$\lim_{t\to+0} i(t) = \frac{E_0}{L}, \quad \lim_{t\to\infty} i(t) = 0. \tag{6.2.27'}$$

Prin urmare, aplicînd unui circuit R.L.C., în care nu circulă curent, un impuls de tensiune $E_0\delta(t)$, se produce instantaneu un curent de intensitate $\frac{E_0}{L}$; menţionăm că acest fapt este în concordanţă cu experienţa.

b) În cazul condiţiei (6.2.13), putem scrie

$$\bar{q}(t) = \frac{E_0}{L\omega} \theta(t) e^{-\alpha t} \sin \omega t, \tag{6.2.28}$$

de unde

$$q(t) = \frac{E_0}{L\omega} e^{-\alpha t} \sin \omega t, \; t \geqslant 0;$$

la limită, vom avea relaţiile (6.2.26'').

Derivînd, obţinem

$$i(t) = \frac{E_0}{L\omega} e^{-\alpha t} (\omega \cos \omega t - \alpha \sin \omega t), \; t \geqslant 0, \tag{6.2.29}$$

iar la limită avem relaţiile (6.2.27').

c) Dacă este îndeplinită condiţia (6.2.17), rezultă

$$\bar{q}(t) = \frac{E_0}{L} t\theta(t) e^{-\alpha t}, \tag{6.2.30}$$

de unde

$$q(t) = \frac{E_0}{L} t e^{-\alpha t}, \; t \geqslant 0;$$

Scanned with OKEN Scanner

obținem la limită relațiile (6.2.26''). De aici, putem scrie

$$i(t) = \frac{E_0}{L}(1 - \alpha t)\, e^{-\alpha t},\ t \geqslant 0; \qquad (6.2.31)$$

la limită, rezultă relațiile (6.2.27').

Observăm că și în cazurile b) și c) putem trage aceleași concluzii ca în cazul a) cu privire la curentul produs instantaneu de un impuls de tensiune.

6.2.2.2. Circuit oscilant

În cele ce urmează, vom studia descărcarea unui condensator printr-o bobină de rezistență R și inductanță L. Datorită diferenței de potențial U la armăturile condensatorului, în lipsa bobinei ($L = 0$), prin firul care leagă armăturile trece curent atîta timp cît potențialele acestora nu sînt egale. Datorită însă bobinei, în momentul în care potențialele armăturilor se egalează forța electromotoare de inducție întreține curentul care scade în intensitate; se produce astfel o reîncărcare a armăturilor. Ia naștere un nou curent, de sens contrar, reîncărcarea armăturilor avînd loc periodic; în circuit se produc astfel oscilații.

O parte din energia curentului se consumă datorită rezistenței R, oscilațiile amortizîndu-se cu timpul; dacă $R = 0$, obținem *oscilații neamortizate*.

Admitem astfel că forța electromotoare este nulă ($E(t) = 0$); de asemenea, condensatorul, care a fost încărcat cu tensiunea U, este descărcat la momentul inițial. Punem astfel condițiile inițiale

$$q_0 = CU, \qquad i_0 = 0. \qquad (6.2.32)$$

Vom folosi rezultatele obținute în cele trei cazuri de integrare considerate mai sus.

a) Dacă se verifică condiția (6.2.10), formula (6.2.12') ne permite să scriem

$$q(t) = \frac{CU}{\beta} e^{-\alpha t}(\alpha \operatorname{sh} \beta t + \beta \operatorname{ch} \beta t), \quad t \geqslant 0; \qquad (6.2.33)$$

în acest caz avem o *descărcare aperiodică*, pentru care nu iau ștere oscilații electrice în circuit.

Scanned with OKEN Scanner

Derivînd în raport cu t, rezultă

$$i(t) = \frac{CU}{\beta}(\beta^2 - \alpha^2)\,e^{-\alpha t}\,\mathrm{sh}\,\beta t = -\frac{U}{L\beta}e^{-\alpha t}\,\mathrm{sh}\,\beta t, \quad t \geqslant 0; \tag{6.2.34}$$

la limită putem scrie

$$\lim_{t\to\infty} q(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} i(t) = 0. \tag{6.2.35}$$

b) Dacă este îndeplinită condiţia (6.2.13), obţinem

$$q(t) = \frac{CU}{\omega}e^{-\alpha t}(\alpha \sin \omega t + \omega \cos \omega t), \; t \geqslant 0. \tag{6.2.36}$$

În acest caz se produce descărcarea oscilantă a unui condensator; caracterul oscilant al descărcării are loc atîta timp cît este îndeplinită condiţia (6.2.13).

Obsevăm că oscilaţiile sarcinii $q(t)$ se amortizează; într-adevăr, amplitudinea

$$\frac{CU}{\omega}\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}\,e^{-\alpha t} = \frac{U}{L\omega}e^{-\alpha t} \tag{6.2.37}$$

tinde către zero pentru $\alpha \to \infty$. Amortizarea este mai slabă dacă rezistenţa R este mică; dacă $R = 0$, se obţin oscilaţii neamortizate. Acesta este cazul *circuitului oscilant*. Intensitatea curentului va fi dată de

$$i(t) = -\frac{CU}{\omega}(\alpha^2 + \omega^2)\,e^{-\alpha t}\sin \omega t =$$

$$= -\frac{U}{L\omega}e^{-\alpha t}\sin \omega t, \quad t \geqslant 0, \tag{6.2.38}$$

iar la limită vom avea relaţiile (6.2.35).

c) Cazul în care are loc relaţia (6.2.17) corespunde unui *oscilator aperiodic limită*, sarcina fiind dată de

$$q(t) = CU(1 + \alpha t)\,e^{-\alpha t}, \quad t \geqslant 0; \tag{6.2.39}$$

intensitatea curentului rezultă sub forma

$$i(t) = -CU\,\alpha^2 t\,e^{-\alpha t}, \; t \geqslant 0, \tag{6.2.40}$$

iar la limită putem scrie relaţiile (6.2.35).

Scanned with OKEN Scanner

Dacă introducem o forță electromotoare $E(t)$ sub forma unei funcții periodice, dezvoltabilă în serie Fourier, obținem de asemenea rezultate importante; în cazul b) menționăm fenomenul de rezonanță, corespunzînd unei pulsații a forței perturbatoare care tinde către pulsația ω a oscilațiilor circuitului.

6.2.2.3. Circuit oscilant cuplat

Un circuit oscilant cuplat este format din două circuite R. L. C., cuplate inductiv, M fiind inductanța lor mutuală; vom admite că cele două circuite sînt identice, avînd rezistența R, inductanța proprie L și capacitatea C(fig. 6.8).

Fie $E(t)$ o sursă de tensiune electromotoare, care acționează la închiderea circuitului, la momentul inițial $t = 0$, condițiile inițiale fiind omogene (nule). Se pune problema determinării sarcinilor $q_1(t)$, $q_2(t)$ de pe cele două armături ale condensatorilor, precum și a intensităților $i_1(t)$ și $i_2(t)$.

Aplicînd legea b) a lui Kirchhoff celor două contururi, obținem sistemul de ecuații

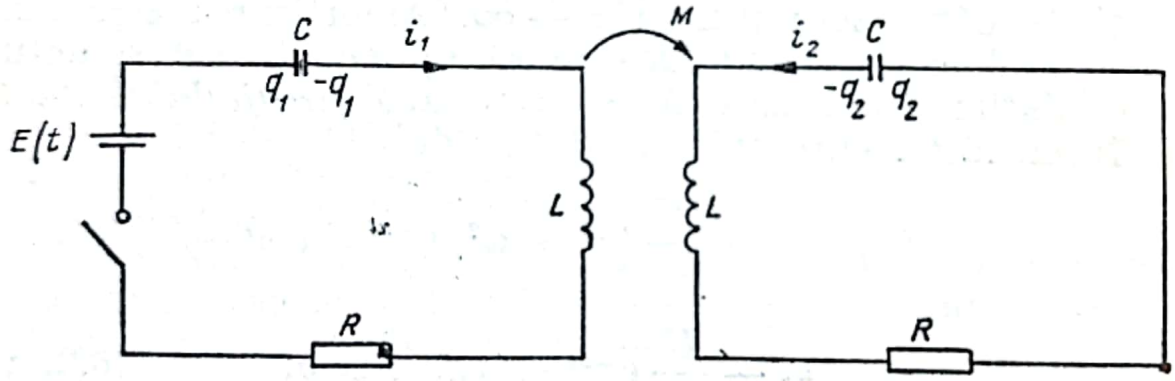


Fig. 6.8.

$$R\bar{i}_1(t) + L\frac{\mathrm{d}\bar{i}_1(t)}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}\bar{i}_2(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\bar{q}_1(t) = \bar{E}(t),$$

$$R\bar{i}_2(t) + L\frac{\mathrm{d}\bar{i}_2(t)}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}\bar{i}_1(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\bar{q}_2(t) = 0. \qquad (6.2.41)$$

Distribuțiile corespund unor funcții obținute prin prelungirea cu valori nule la stînga a funcțiilor căutate și a

datelor problemei; dacă condiţiile iniţiale nu sînt nule, acestea vor fi incluse în expresia lui $\bar{E}(t)$, care va fi astfel tot o distribuţie cunoscută. Observînd că

$$\bar{i}_1(t) = \frac{\mathrm{d}\bar{q}_1(t)}{\mathrm{d}t}, \quad \bar{i}_2(t) = \frac{\mathrm{d}\bar{q}_2(t)}{\mathrm{d}t}, \tag{6.2.42}$$

obţinem ecuaţiile

$$L\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\bar{q}_1(t) + M\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\bar{q}_2(t) + R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{q}_1(t) + \frac{1}{C}\bar{q}_1(t) = \bar{E}(t),$$

$$M\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\bar{q}_1(t) + L\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\bar{q}_2(t) + R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{q}_2(t) + \frac{1}{C}\bar{q}_2(t) = 0.$$

Aplicînd transformata Laplace, rezultă

$$\left(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}\right)\tilde{\bar{q}}_1(p) + Mp^2\tilde{\bar{q}}_2(p) = \tilde{\bar{E}}(p),$$

$$Mp^2\tilde{\bar{q}}_1(p) + \left(LP^2 + Rp + \frac{1}{C}\right)\tilde{\bar{q}}_2(p) = 0,$$

unde p este noua variabilă complexă. De aici căpătăm

$$\tilde{\bar{q}}_1(p) = -\frac{LP^2 + Rp + \dfrac{1}{C}}{M^2p^4 - \left(Lp^2 + Rp + \dfrac{1}{C}\right)^2}\tilde{\bar{E}}(p),$$

$$\tilde{\bar{q}}_2(p) = \frac{Mp^2}{Mp^4 - \left(Lp^2 + Rp + \dfrac{1}{C}\right)^2}\tilde{\bar{E}}(p). \tag{6.2.43}$$

Observăm că rădăcinile numitorilor sînt

$$p_{1,2} = -\alpha_1 \pm \mathrm{i}\omega_1, \quad p_{3,4} = -\alpha_2 \pm \mathrm{i}\omega_2, \tag{6.2.44}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$\alpha_{1,2} = \frac{R}{2(L \pm M)}, \quad \omega_{1,2} = \frac{1}{2(L \pm M)} \sqrt{\frac{4(L \pm M)}{C} - R^2};$$

Am admis că se verifică condiţiile

$$R^2 < \frac{4(L \pm M)}{C}, \tag{6.2.45}$$

obţinînd astfel valori complex conjugate pentru p_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$, valori care să ne conducă la un *circuit oscilant*. Deoarece constantele R, L, M şi C sînt pozitive, este suficient să fie îndeplinită condiţia

$$R^2 < \frac{4(L - M)}{C}.$$

Mai observăm că este *necesar* ca $L > M$; în lipsa rezistenţei R, $(R = 0)$, această condiţie este şi *suficientă*. Putem scrie

$$\frac{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}}{Mp^4 - \left(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(L+M)p^2 + Rp + \frac{1}{C}} + \frac{1}{(L - M)p^2 + Rp + \frac{1}{C}}\right],$$

$$\frac{Mp^2}{Mp^4 - \left(Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(L + M)p^2 + Rp + \frac{1}{C}} - \frac{1}{(L - M)p^2 + Rp + \frac{1}{C}}\right];$$

prin analogie cu rezultatele obținute în 6.2.1.2, cazul b), și ținînd seama de formula (1.5.84), rezultă

$$\bar{q}_1(t) = \bar{E}(t) * \frac{1}{2}\,\theta(t)\left[\frac{1}{(L+M)\omega_1}\,e^{-\alpha_1 t}\sin\omega_1 t + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(L-M)\omega_2}\,e^{-\alpha_2 t}\sin\omega_2 t\right], \tag{6.2.46}$$

$$\bar{q}_2(t) = \bar{E}(t) * \frac{1}{2}\,\theta(t)\left[\frac{1}{(L+M)\omega_1}\,e^{-\alpha_1 t}\sin\omega_1 t - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(L-M)\omega_2}\,e^{-\alpha_2 t}\sin\omega_2 t\right].$$

Pentru intensitățile $\bar{i}_1(t)$ și $\bar{i}_2(t)$ căpătăm

$$\bar{i}_1(t) = \frac{d\bar{E}(t)}{dt} * \frac{1}{2}\,\theta(t)\left[\frac{1}{(L+M)\omega_1}\,e^{-\alpha_1 t}\sin\omega_1 t + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(L-M)\omega_2}\,e^{-\alpha_2 t}\sin\omega_2 t\right] =$$

$$= \bar{E}(t) * \frac{1}{2}\,\theta(t)\left[\frac{1}{(L+M)\omega_1}\,e^{-\alpha_1 t}(\omega_1\cos\omega_1 t - \alpha_1\sin\omega_1 t) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(L-M)\omega_2}\,e^{-\alpha_2 t}(\omega_2\cos\omega_2 t - \alpha_2\sin\omega_2 t)\right], \tag{6.2.47}$$

$$\bar{i}_2(t) = \frac{d\bar{E}(t)}{dt} * \frac{1}{2}\,\theta(t)\left[\frac{1}{(L+M)\omega_1}\,e^{-\alpha_1 t}\sin\omega_1 t - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(L-M)\omega_2}\,e^{-\alpha_2 t}\sin\omega_2 t\right] =$$

$$= \bar{E}(t) * \frac{1}{2}\,\theta(t)\left[\frac{1}{(L+M)\omega_1}\,e^{-\alpha_1 t}(\omega_1\cos\omega_1 t - \alpha_1\sin\omega_1 t) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(L-M)\omega_2}\,e^{-\alpha_2 t}(\omega_2\cos\omega_2 t - \alpha_2\sin\omega_2 t)\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

În particular, vom admite că la momentul inițial se aplică o tensiune electromotoare E_0, care rămîne constantă în timp, putînd fi reprezentată sub forma (6.2.21). Obținem

$$q_1(t) = -\frac{1}{2} CE_0 \left[\frac{1}{\omega_1} e^{-\omega_1 t}(\omega_1 \cos \omega_1 t + \alpha_1 \sin \omega_1 t) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\omega_2} e^{-\omega_2 t}(\omega_2 \cos \omega_2 t + \alpha_2 \sin \omega_2 t) - 2 \right], \quad t \geqslant 0,$$

(6.2.48)

$$q_2(t) = -\frac{1}{2} CE_0 \left[\frac{1}{\omega_1} e^{-\omega_1 t}(\omega_1 \cos \omega_1 t + \alpha_1 \sin \omega_1 t) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\omega_2} e^{-\omega_2 t}(\omega_2 \cos \omega_2 t + \alpha_2 \sin \omega_2 t) \right], \quad t \geqslant 0,$$

și

$$i_1(t) = \frac{1}{2} E_0 \left[\frac{1}{(L+M)\omega_1} e^{-\alpha_1 t} \sin \omega_1 t + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(L-M)\omega_2} e^{-\alpha_2 t} \sin \omega_2 t \right], \quad t \geqslant 0, \qquad (6.2.49)$$

$$i_2(t) = \frac{1}{2} E_0 \left[\frac{1}{(L+M)\omega_1} e^{-\alpha_1 t} \sin \omega_1 t - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(L-M)\omega_2} e^{-\alpha_2 t} \sin \omega_2 t \right], \quad t \geqslant 0.$$

La limită, putem scrie

$$\lim_{t \to \infty} q_1(t) = CE_0, \lim_{t \to \infty} q_2(t) = \lim_{t \to \infty} i_1(t) = \lim_{t \to \infty} i_2(t) = 0, \qquad (6.2.50)$$

rezultat care se explică prin faptul că pentru $t > 0$ fenomenul este permanent.

În cazul unui impuls de tensiune la momentul inițial, exprimat sub forma

$$\bar{E}(t) = E_0 \, \delta(t), \qquad (6.2.51)$$

Scanned with OKEN Scanner

obținem un fenomen tranzitoriu, pentru care

$$q_1(t) = \frac{1}{2}E_0\left[\frac{1}{(L+M)\omega_1}\,e^{-\alpha_1 t}\sin\omega_1 t + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(L-M)\,\omega_2}\,e^{-\alpha_2 t}\sin\omega_2 t\right],\ t \geqslant 0,$$
$$q_2(t) = \frac{1}{2}E_0\left[\frac{1}{(L+M)\,\omega_1}\,e^{-\alpha_1 t}\sin\omega_1 t - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{(L-M)\,\omega_2}\,e^{-\alpha_2 t}\sin\omega_2 t\right],\ t \geqslant 0, \qquad (6.2.52)$$

și

$$i_1(t) = \frac{1}{2}E_0\left[\frac{1}{(L+M)\,\omega_1}\,e^{-\alpha_1 t}(\omega_1\cos\omega_1 t - \alpha_1\sin\omega_1 t) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(L-M)\,\omega_2}\,e^{-\alpha_2 t}(\omega_2\cos\omega_2 t - \alpha_2\sin\omega_2 t)\right],\ t \geqslant 0, \qquad (6.2.53)$$

$$i_2(t) = \frac{1}{2}E_0\left[\frac{1}{(L+M)\,\omega_1}\,e^{-\alpha_1 t}(\omega_1\cos\omega_1 t - \alpha_1\sin\omega_1 t) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{(L-M)\,\omega_2}\,e^{-\alpha_2 t}(\omega_2\cos\omega_2 t - \alpha_2\sin\omega_2 t)\right],\quad t \geqslant 0.$$

La limită, obținem

$$\lim_{t\to\infty} q_1(t) = \lim_{t\to\infty} q_2(t) = \lim_{t\to\infty} i_1(t) = \lim_{t\to\infty} i_2(t) = 0. \qquad (6.2.54)$$

6.3. Aplicații ale teoriei distribuțiilor la sisteme dinamice liniare

6.3.1. *Cvadripoli*

6.3.1.1. Considerații generale

Prin definiție, un *cvadripol* este constituit dintr-o rețea electrică, la care distingem două borne de intrare (1 și 1′) și două borne de ieșire (2 și 2′) (fig. 6.9). Prin schema bloc am reprezentat un circuit complex, format din rezistențe,

Scanned with OKEN Scanner

inductanţe şi capacităţi ; acestea caracterizează *structura circuitului* (*distribuţia pondere*). Notăm cu $i_1(t)$ şi $E_1(t)$ intensitatea curentului, respectiv forţa electromotoare la intrare (bornele 1 şi 1′) ; acestea sînt *mărimile de intrare*, care constituie *excitaţia sistemului electric* menţionat. Intensitatea curentului şi forţa electromotoare la ieşire (bornele 2 şi 2′) se vor nota cu $i_2(t)$, respectiv $E_2(t)$; acestea constituie *mărimile de ieşire*, reprezentînd *răspunsul sistemului electric* considerat.

În studiul unui sistem electric se caută să se găsească o relaţie între mărimile de intrare şi mărimile de ieşire, ţinînd seama de structura circuitului. Dacă se dă excitaţia şi se caută răspunsul, se face o *analiză a sistemului* ; în caz contrar, dacă se dau răspunsul şi excitaţia care a condus la acest răspuns, căutîndu-se distribuţia pondere, se face o *sinteză a sistemului*. În studiul acestor probleme se folosesc cele două legi ale lui Kirchhoff.

Printre cvadripoli vom menţiona *filtrele*, care favorizează trecerea unor semnale cu o anumită frecvenţă, atenuînd semnalele cu altă frecvenţă.

Studiind structura intimă a cvadripolilor cu *elemente pasive* (pentru care coeficienţii R, L şi C sînt constanţi), vom considera patru tipuri de cvadripoli elementari, împărţiţi în două grupuri, după cum rezistenţa, bobina şi condensatorul se leagă în serie sau în paralel. Vom considera astfel schema din fig. 6.10, unde un circuit R.L.C. este legat *în serie* ; putem avea astfel o structură de tip I_s (fig. 6. 11, *a*) sau o structură de tip II_s (fig.6.11,*b*). De asemenea, în fig. 6.12 este prezentat un circuit R.L.C., legat *în paralel* ; în acest caz avem o structură de tip I_p (fig. 6.13, *a*) sau o structură de tip II_p (fig. 6.13, *b*). Cu ajutorul acestor cvadripoli elementari se pot forma diferite circuite complexe.

6.3.1.2. Cvadripoli elementari. Cvadripoli complecşi

În cazul unui cvadripol de tip I_s (fig. 6.11, *a*), putem scrie relaţia dintre mărimile $E_1(t)$, $E_2(t)$ şi $i(t)$ sub forma

$$E_1(t) = L\frac{\mathrm{d}\,i(t)}{\mathrm{d}t} + Ri(t) + \frac{1}{C}q(t) + E_2(t), \qquad (6.3.1)$$

Scanned with OKEN Scanner

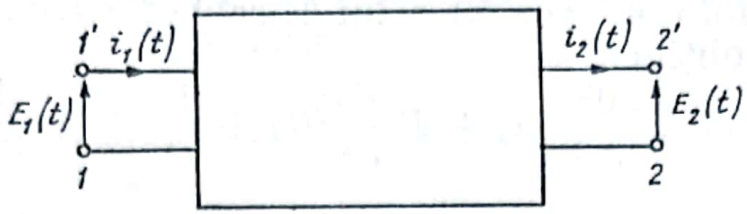


Fig. 6.9.

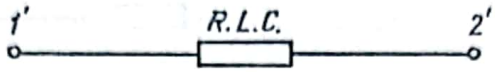


Fig. 6.10.

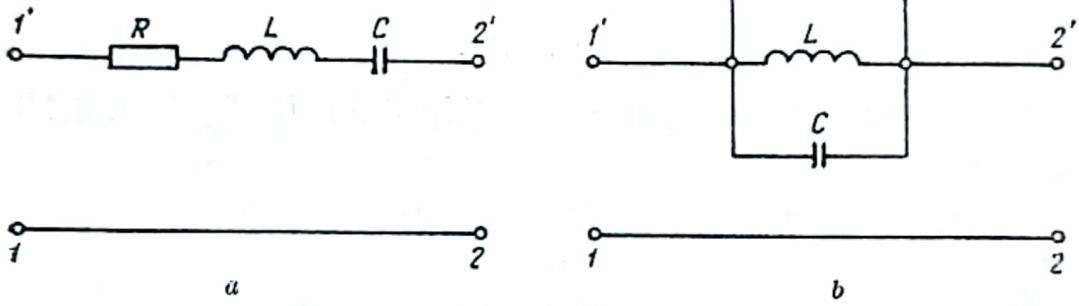


Fig. 6.11.

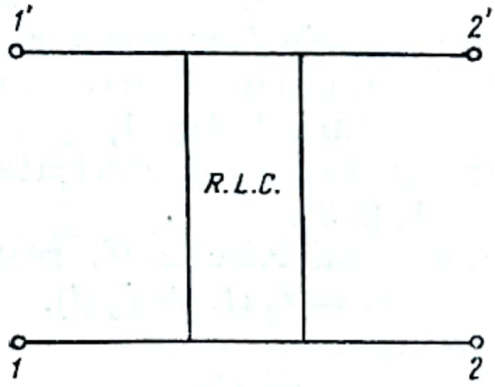


Fig. 6.12.

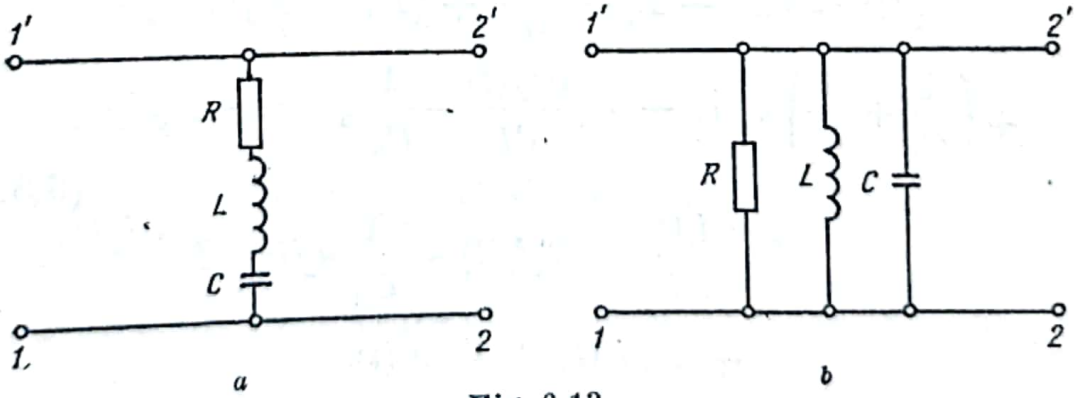


Fig 6.13.

Scanned with OKEN Scanner

unde am folosit legea b) a lui Kirchhoff; eliminînd sarcina $q(t)$, obţinem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_1(t) = L\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}i(t) + R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t) + \frac{1}{C}i(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_2(t).$$

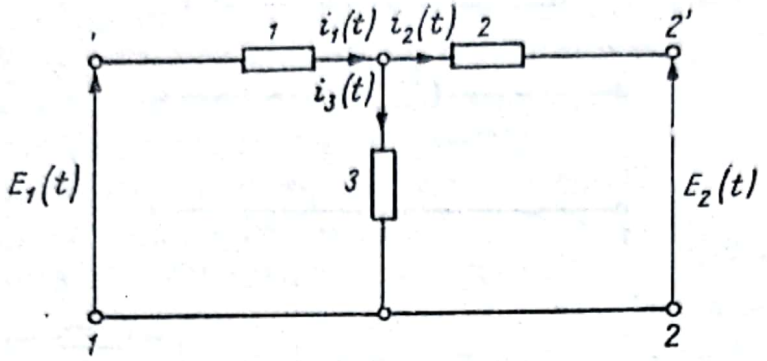


Fig. 6.14.

De asemenea, pentru un cvadripol de tip I_p (fig. 6.13,*a*) rezultă

$$E_1(t) = E_2(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + Ri(t) + \frac{1}{C}q(t) \qquad (6.3.2)$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_1(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_2(t) = L\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}i(t) + R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t) + \frac{1}{C}i(t).$$

Un exemplu de *cvadripol* complex este cel *cu secţiune în* $\top$ (fig. 6.14), alcătuit din două structuri de tip I_s (structurile 1 şi 2) şi o structură de tip I_p (structura 3), legate în lanţ; aceste structuri sînt caracterizate prin coeficienţii R_j, L_j şi C_j, $(j = 1, 2, 3)$.

Aplicînd legea a) a lui Kirchhoff, rezultă

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t). \qquad (6.3.3)$$

Legea b) a lui Kirchhoff ne va da

$$E_1(t) = (L_1 + L_3)\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} + (R_1 + R_3)\,i_1(t) + \\ + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3}\right)q_1(t) - L_3\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{C_3}q_2(t) - R_3\,i_2(t),$$

$$-E_2(t) = -L_3\frac{\mathrm{d}i_3(t)}{\mathrm{d}t} - R_3 i_2(t) - \frac{1}{C_3}q_3(t) + L_2\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} + \\ + R_2\,i_2(t) + \frac{1}{C_2}q_2(t), \qquad (6.3.4)$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde, eliminînd sarcinile electrice și ținînd seama de relația (6.3.3), putem scrie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_1(t) = (L_1 + L_3)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}i_1(t) + (R_1 + R_3)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_1(t) +$$

$$+\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_3}\right)i_1(t) - L_3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^2}i_2(t) - R_3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_2(t) - \frac{1}{C_3}i_2(t),$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_2(t) = (L_2 + L_3)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}i_2(t) + (R_2 + R_3)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_2(t) +$$

$$+\left(\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}\right)i_2(t) - L_3\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}i_1(t) - R_3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_1(t) - \frac{1}{C_3}i_1(t).$$

Alt cvadripol complex este cvadripolul în Π (fig. 6.15), alcătuit din două structuri de tip I_p (structurile 1 și 3) și o structură de tip I_s (structura 2), legate în lanț. În mod analog, se obțin și alți cvadripoli complecși, pentru care se pot scrie relații similare.

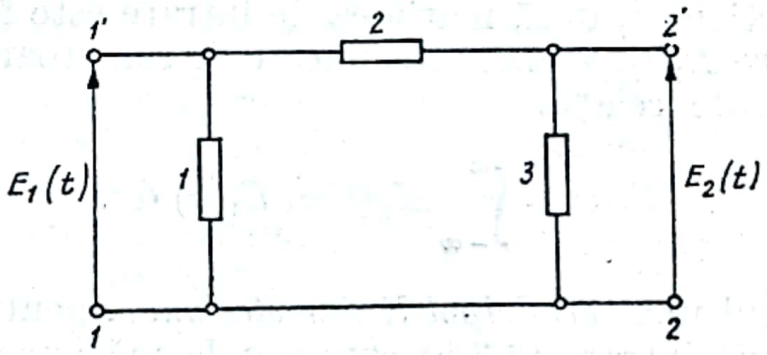


Fig. 6.15.

6.3.2. *Sisteme staționare*

6.3.2.1. Cvadripoli liniari

Vom nota cu $\varphi_1(t)$ una din mărimile de intrare [$E_1(t)$ sau $i_1(t)$] și cu $\varphi_2(t)$ mărimea corespunzătoare de ieșire în cazul unui sistem dinamic (în particular, un cvadripol). Dacă mărimii de intrare

$$\varphi_1'(t) = \varphi_1(t + \tilde{t}) \qquad (6.3.5)$$

îi corespunde mărimea de ieşire

$$\varphi_2'(t) = \varphi_2(t + \bar{t}), \qquad (6.3.5')$$

spunem că sistemul dinamic (respectiv cvadripolul) este *staţionar*; aceasta corespunde unei conservări a translaţiei variabilei temporale.

Prin definiţie, un *cvadripol* (în general, un sistem dinamic) este *liniar* dacă mărimea de intrare $\varphi_1(t)$ se transformă în mărimea de ieşire $\varphi_2(t)$ printr-o relaţie de forma

$$\varphi_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t, \tau)\varphi_1(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,; \qquad (6.3.6)$$

această relaţie defineşte un operator integral U, astfel încît putem scrie

$$\varphi_2(t) = \mathrm{U}\ \varphi_1(t),$$

de unde rezultă caracterul liniar al său. Funcţia $K(t, \tau)$ reprezintă *nucleul* transformării integrale.

În particular, dacă mărimea de intrare este forţa electromotoare $E_1(t)$, atunci tensiunea electromotoare la ieşire este dată de relaţia

$$E_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_E(t, \tau)\, E_1(\tau)\, \mathrm{d}\tau. \qquad (6.3.7)$$

În cazul unui *cvadripol liniar staţionar*, pentru care la mărimea de intrare (6.3.5) corespunde mărimea de ieşire (6.3.5'), putem scrie

$$\varphi_2'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t, \tau)\ \varphi_1(\tau + \bar{t})\, \mathrm{d}\tau = \varphi_2(t + \bar{t}) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} K(t + \bar{t}, \tau)\ \varphi_1(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,;$$

folosind o schimbare de variabilă convenabilă, rezultă

$$\int_{-\infty}^{\infty} [K(t, \tau - \bar{t}) - K(t + \bar{t}, \tau)]\ \varphi_1(\tau)\, \mathrm{d}\tau = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece funcţia integrabilă $\varphi_1(t)$ este arbitrară, nucleul K fiind de asemenea integrabil, obţinem

$$K(t, \tau - \bar{t}) = K(t + \bar{t}, \tau); \qquad (6.3.8)$$

prin urmare, nucleul K al transformării integrale este de forma $K(t - \tau)$, folosind aceeaşi literă pentru funcţia corespunzătoare. În acest caz, între mărimile de intrare şi ieşire are loc o relaţie de forma

$$\varphi_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t - \tau)\, \varphi_1(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau)\, \varphi_1(t - \tau)\, d\tau. \qquad (6.3.9)$$

În felul acesta, este util ca mărimile de intrare şi de ieşire, precum şi mărimile care caracterizează structura circuitului să fie exprimate în distribuţii, pentru stabilirea relaţiilor dintre ele folosind algebra de convoluţie din spaţiul K'_+.

Astfel, pentru schema bloc din fig. 6.16 putem scrie

$$\varphi_2(t) = K(t) * \varphi_1(t), \qquad (6.3.10)$$

unde am introdus produsul de convoluţie; relaţia (6.3.10) caracterizează cvadripolii liniari staţionari. Distribuţia $K(t)$ se numeşte *distribuţia pondere.*

De exemplu, tensiunea electromotoare de ieşire $E_2(t)$ va rezulta sub forma

$$E_2(t) = K_E(t) * E_1(t), \qquad (6.3.10')$$

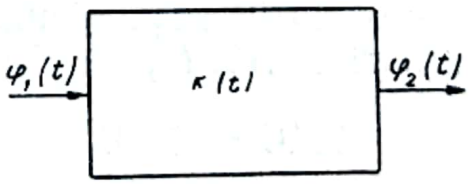


Fig 6.16.

unde $K_E(t)$ este *distribuţia pondere corespunzătoare forţei electromotoare.* De asemenea, intensitatea curentului de ieşire va fi

$$i_2(t) = K_i(t) * i_1(t), \qquad (6.3.10'')$$

Scanned with OKEN Scanner

unde $K_i(t)$ este *distribuția pondere corespunzătoare intensității curentului.*

Să admitem că excitația este

$$\varphi_1(t) = \delta(t); \qquad (6.3.11)$$

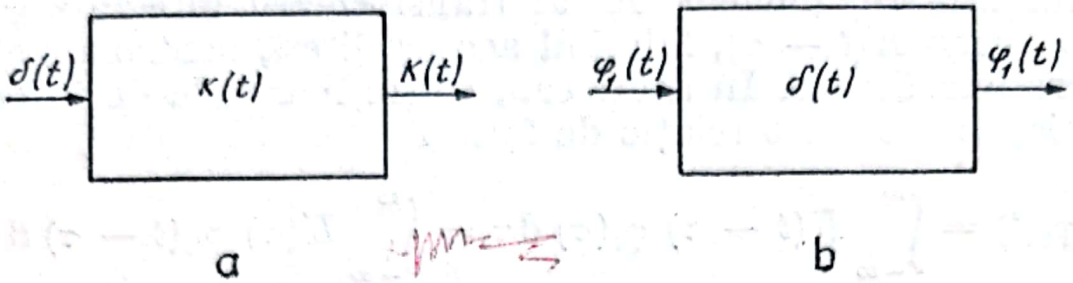


Fig. 6.17.

observînd că distribuția lui Dirac reprezintă elementul unitate în algebra de convoluție K'_+, putem scrie

$$\varphi_2(t) = K(t).$$

Prin urmare, distribuția pondere $K(t)$ reprezintă răspunsul cvadripolului liniar staționar la excitația (6.3.11) (fig. 6.17, *a*). În particular, distribuția pondere $K_E(t)$, corespunzătoare forței electromotoare, reprezintă răspunsul cvadripolului la un impuls de tensiune egal cu unitatea, iar distribuția pondere $K_i(t)$, corespunzătoare intensității curentului, reprezintă răspunsul cvadripolului la un curent cu o intensitate impulsivă egală cu unitatea. Dacă

$$K(t) = \delta(t), \qquad (6.3.12)$$

se obține un cvadripol staționar particular, care nu modifică semnalul de intrare (fig. 6.17, *b*), astfel încît se poate scrie

$$\varphi_2(t) = \varphi_1(t).$$

6.3.2.2. Divizorul de tensiune

Divizorul de tensiune este un filtru staționar important, a cărui structură este dată în fig. 6.18. Aplicînd legea b) a lui Kirchhoff celor două contururi, obținem

$$E_1(t) = (R_1 + R_2)\, i(t), \qquad E_2(t) = R_2\, i(t), \qquad (6.3.13)$$

de unde

$$E_2(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E_1(t).$$

Ţinînd seama de rezultatele de la subpunctul precedent, rezultă

$$K_E(t) = \delta\left(\frac{R_1 + R_2}{R_2} t\right) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \delta(t). \quad (6.3.14)$$

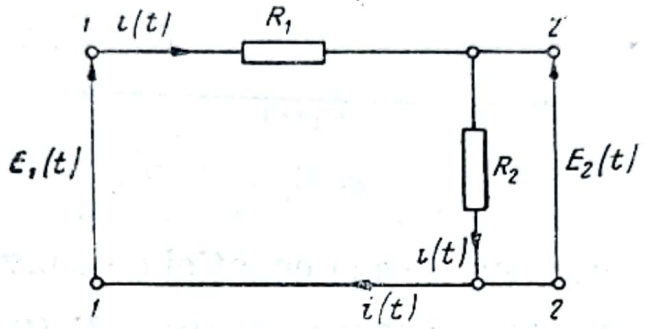


Fig. 6.18.

În general, pentru a determina distribuţia pondere putem aplica transformata Fourier sau transformata Laplace produselor de convoluţie (6.3.10) — (6.3.10″); în cazul de mai sus, putem scrie

$$\tilde{K}_E(p) = \frac{\tilde{E}_2(p)}{\tilde{E}_1(p)},$$

unde p este noua variabilă complexă, fiind conduşi la acelaşi rezultat.

6.3.2.3. Filtru R.C. de joasă frecvenţă

Vom considera un *filtru* R.C. *de joasă frecvenţă*, reprezentat în fig. 6.19. Aplicînd legea lui Ohm şi legea b) a lui Kirchhoff, obţinem ecuaţiile

$$E_1(t) = R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t), \qquad E_2(t) = \frac{1}{C} q(t). \quad (6.3.15)$$

Eliminînd sarcina electrică $q(t)$, rezultă ecuaţia diferenţială

$$RC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_2(t)+E_2(t)=E_1(t), \tag{6.3.16}$$

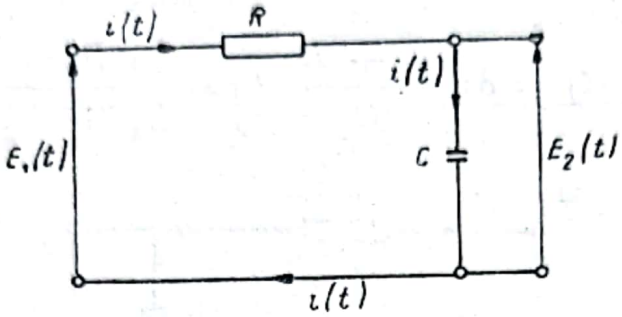


Fig. 6.19.

care poate fi scrisă sub forma ecuaţiei de convoluţie

$$[RC\,\delta'(t)+\delta(t)]*E_2(t)=E_1(t).$$

Aplicînd transformata Laplace ecuaţiei

$$[RC\,\delta'(t)+\delta(t)]*\mathscr{E}(t)=\delta(t), \tag{6.3.17}$$

pe care o verifică soluţia elementară, obţinem

$$(RCp+1)\,\widetilde{\mathscr{E}}(p)=1,$$

de unde

$$\widetilde{\mathscr{E}}(p)=\frac{1}{RCp+1}=\frac{1}{RC}\,\frac{1}{p+\frac{1}{RC}}. \tag{6.3.18}$$

Soluţia elementară se va scrie sub forma

$$\mathscr{E}(t)=\frac{1}{RC}\,\theta(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}, \tag{6.3.19}$$

iar forţa electromotoare de ieşire devine

$$E_2(t)=\frac{1}{RC}\,\theta(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}*E_1(t); \tag{6.3.20}$$

Scanned with OKEN Scanner

dacă $E_1(t)$ este o funcţie integrabilă, rezultă

$$E_2(t) = \frac{1}{RC}\int_0^t e^{-\frac{1}{RC}\tau} E_1(t-\tau)\,d\tau, \quad t \geqslant 0.$$

Mai observăm că soluţia elementară găsită reprezintă răspunsul filtrului la un impuls de tensiune de intrare egal cu unitatea ; prin urmare, distribuţia pondere va fi dată de

$$K_E(t) = \frac{1}{RC}\,\theta(t)\,e^{-\frac{1}{RC}t} = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t < 0, \\ \dfrac{1}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t} & \text{pentru } t \geqslant 0. \end{cases}$$

Imaginea distribuţiei pondere prin transformata Laplace va fi funcţia de transfer a filtrului R.C. de joasă frecvenţă, avînd forma

$$\tilde{K}_E(p) = \frac{1}{RCp+1}.$$

6.3.2.4. Filtru R.C. de înaltă frecvenţă

Fie acum un *filtru* R.C. *de înaltă frecvenţă*, a cărui structură este dată în fig. 6.20. Ecuaţiile diferenţiale corespunzătoare se scriu sub forma

$$E_1(t) = R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C}q(t), \qquad E_2(t) = R\frac{dq(t)}{dt}; \qquad (6.3.21)$$

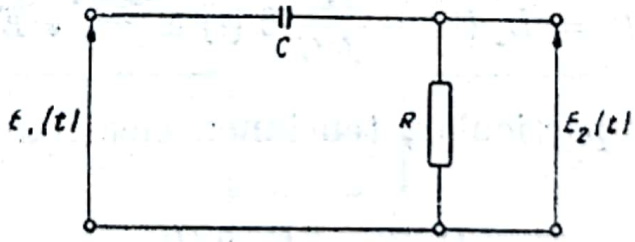


Fig. 6.20

eliminînd sarcina electrică, rezultă

$$RC\frac{d}{dt}E_2(t) + E_2(t) = RC\frac{d}{dt}E_1(t), \qquad (6.3.22)$$

ecuaţia de convoluţie corespunzătoare fiind

$$[RC\,\delta'(t) + \delta(t)] * E_2(t) = RC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_1(t).$$

Aplicînd transformata Laplace, obţinem imaginea soluţiei elementare sub forma (6.3.18); soluţia elementară va avea tot expresia (6.3.19), ecuaţia pe care o verifică această soluţie fiind ecuaţia (6.3.17). Obţinem astfel tensiunea electromotoare de ieşire

$$E_2(t) = \mathscr{E}(t) * RC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_1(t) = RC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{E}(t) * E_1(t);$$

aceasta ne permite să scriem distribuţia pondere sub forma

$$K_E(t) = RC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{E}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\theta(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}\right],$$

astfel încît

$$K_E(t) = \delta(t) - \frac{1}{RC}\,\theta(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}. \qquad (6.3.23)$$

Funcţia de transfer va fi

$$\widetilde{K}_E(p) = \frac{RCp}{RCp+1} = 1 - \frac{1}{RCp+1}. \qquad (6.3.24)$$

Tensiunea electromotoare de ieşire se obţine sub forma

$$E_2(t) = E_1(t) - \frac{1}{RC}\,\theta(t)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t} * E_1(t). \qquad (6.3.25)$$

Dacă, în particular, tensiunea electromotoare de intrare este

$$E_1(t) = E_0\,\theta(t), \qquad (6.3.26)$$

obţinem

$$E_2(t) = RC\,\mathscr{E}(t) * \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_1(t) = RCE_0\,\mathscr{E}(t) * \delta(t);$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$E_2(t) = E_0\,\theta(t)\,e^{-\frac{1}{RC}t} = \begin{cases} 0 \text{ pentru } t < 0, \\ E_0\,e^{-\frac{1}{RC}t} \text{ pentru } t \geqslant 0, \end{cases} \qquad (6.3.27)$$

rezultat util în cazul circuitelor de diferențiere.

6.3.2.5. Legarea filtrelor staționare în lanț

Fie două filtre staționare, reprezentate în fig. 6.21, primul având o distribuție pondere $K_1(t)$, care transformă mărimea de intrare $\varphi_1(t)$ în mărimea de ieșire $\varphi(t)$, iar al

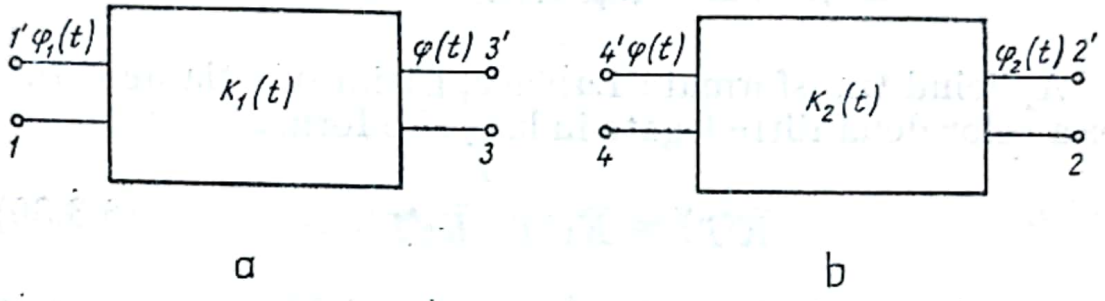


Fig. 6.21.

doilea având o distribuție pondere $K_2(t)$, care transformă mărimea de intrare $\varphi(t)$ în mărimea de ieșire $\varphi_2(t)$. Prin *legarea în lanț* a acestor două filtre înțelegem montajul din fig. 6.22, unde rămîn bornele de intrare 1 și 1′ și bornele de ieșire 2 și 2′.

Între mărimile de intrare și ieșire $\varphi_1(t)$, respectiv $\varphi_2(t)$ și mărimea $\varphi(t)$, care este considerată succesiv de intrare și de ieșire, putem scrie relațiile

$$\varphi(t) = K_1(t) * \varphi_1(t),\ \varphi_2(t) = K_2(t) * \varphi(t), \qquad (6.3.28)$$

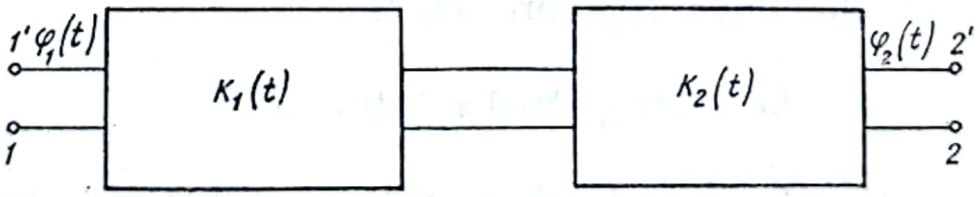


Fig. 6.22.

de unde rezultă

$$\varphi_2(t) = K_2(t) * [K_1(t) * \varphi_1(t)] = \\ = [K_1(t) * K_2(t)] * \varphi_1(t);$$

în acest caz, putem scrie o relaţie de forma (6.3.10), corespunzătoare unei scheme bloc ca cea din fig. 6.16, unde

$$K(t) = K_1(t) * K_2(t). \tag{6.3.29}$$

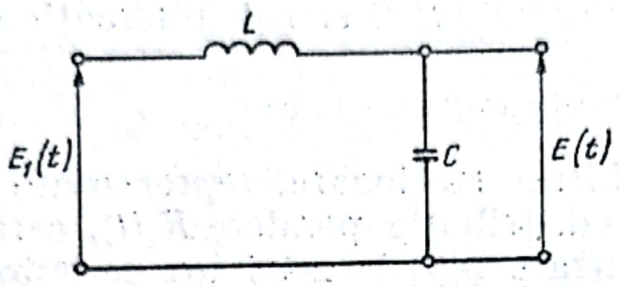


Fig. 6.23.

Aplicînd transformata Laplace, găsim funcţia de transfer a celor două filtre legate în lanţ sub forma

$$\widetilde{K}(p) = \widetilde{K}_1(p)\ \widetilde{K}_2(p). \tag{6.3.30}$$

Fie, în particular, filtrul din fig. 6.23; putem scrie ecuaţiile

$$E_1(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}q(t), \quad E(t) = \frac{1}{C}q(t), \tag{6.3.31}$$

de unde, prin eliminarea sarcinii electrice, rezultă ecuaţia diferenţială

$$LC\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}E(t) + E(t) = E_1(t) \tag{6.3.32}$$

şi ecuaţia de convoluţie corespunzătoare

$$[LC\delta''(t) + \delta(t)] * E(t) = E_1(t).$$

Aplicînd transformata Laplace, obţinem funcţia de transfer

$$\widetilde{K}_{E1}(p) = \frac{1}{LC\,p^2 + 1}; \tag{6.3.33}$$

Scanned with OKEN Scanner

scriind această funcţie sub forma

$$\tilde{K}_{E1}(p) = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{p^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2},$$

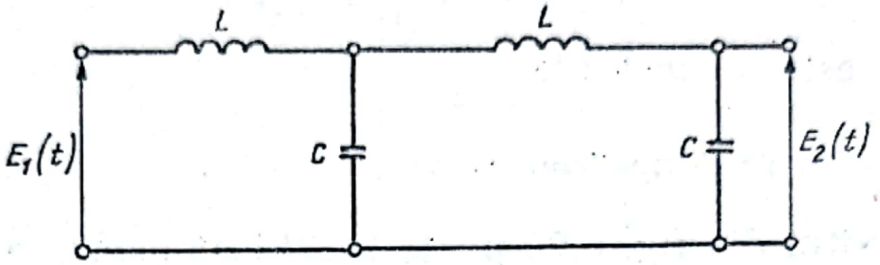


Fig. 6.24.

rezultă distribuţia pondere

$$K_{E1}(t) = \frac{1}{\sqrt{LC}} \theta(t) \sin \frac{1}{\sqrt{LC}} t. \qquad (6.3.34)$$

Forţa electromotoare $E(t)$ va fi

$$E(t) = \frac{1}{\sqrt{LC}} \theta(t) \sin \frac{1}{\sqrt{LC}} t * E_1(t). \qquad (6.3.35)$$

Dacă legăm două asemenea filtre în lanţ (fig. 6.24), calculăm distribuţia pondere cu formula (6.3.29); obţinem

$$K_E(t) = K_{E1}(t) * K_{E2}(t) = \frac{1}{LC} \theta(t) \sin \frac{1}{\sqrt{LC}} t * \theta(t) \sin \frac{1}{\sqrt{LC}} t,$$

de unde, folosind formula (1.3.29'),

$$K_E(t) = \frac{1}{2\sqrt{LC}} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{LC}} t - \frac{1}{\sqrt{LC}} t \cos \frac{1}{\sqrt{LC}} t \right). \qquad (6.3.36)$$

Tensiunea electromotoare de ieşire este dată de relaţia

$$E_2(t) = \frac{1}{2\sqrt{LC}} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{LC}} t - \frac{1}{\sqrt{LC}} t \cos \frac{1}{\sqrt{LC}} t \right) * E_1(t), \qquad (6.3.37)$$

fiind exprimată cu ajutorul tensiunii electromotoare de intrare.

6.3.3. *Circuit de diferențiere*

În cazul unui circuit de diferențiere, între mărimea de intrare $E_1(t)$ (în speță forța electromotoare) și mărimea de ieșire $E_2(t)$ trebuie să existe o relație de forma

$$E_2(t) = \tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_1(t), \tag{6.3.38}$$

unde τ este o constantă.

6.3.3.1. Circuit de diferențiere real

Circuitul din fig. 6.20 poate fi utilizat pentru a obține un *circuit de diferențiere*; cu ajutorul notației

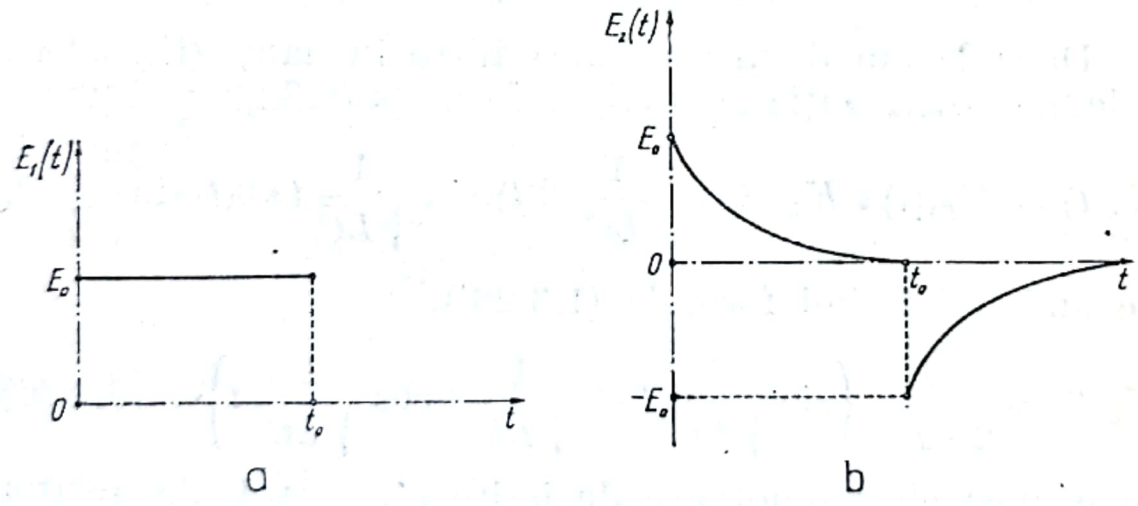
$$\tau = RC, \tag{6.3.39}$$

putem scrie funcția de transfer sub forma

$$\tilde{K}_E(p) = \frac{\tau p}{1 + \tau p}. \tag{6.3.40}$$

Să considerăm o tensiune electromotoare de intrare de forma

$$E_1(t) = E_0[\theta(t) - \theta(t - t_0)], \tag{6.3.41}$$



Fi3. 6.25.

constantă pe intervalul de timp t_0(fig. 6.25, *a*); transformata sa Laplace va fi

$$\tilde{E}_1(p) = \frac{E_0}{p}(1 - \mathrm{e}^{-pt_0}).$$

Scanned with OKEN Scanner

Ţinînd seama de (6.3.40), obţinem transformata Laplace a tensiunii electromotoare de ieşire

$$\tilde{E}_2(p) = \frac{\tau E_0}{1 + \tau p}(1 - e^{-pt_0}),$$

această tensiune exprimîndu-se apoi sub forma

$$E_2(t) = E_0\left(1 - e^{\frac{1}{\tau}t_0}\right)e^{-\frac{1}{\tau}t}; \qquad (6.3.42)$$

graficul din fig. 6.25,*b* pune în evidenţă o amortizare rapidă a tensiunii $E_2(t)$.

6.3.3.2. Circuit de diferenţiere ideal

Observînd că distribuţia pondere $K_E(t)$ este egală cu forţa electromotoare de ieşire corespunzătoare unui impuls de tensiune de intrare şi ţinînd seama de condiţia (6.3.38) pe care trebuie să o îndeplinească un circuit de diferenţiere, rezultă

$$K_E(t) = \tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta(t) = \tau\delta'(t). \qquad (6.3.43)$$

Pentru distribuţia de transfer, putem deci scrie

$$\tilde{K}_E(p) = \tau p. \qquad (6.3.44)$$

Comparînd acest rezultat cu relaţia (6.3.40), corespunzătoare unui circuit de diferenţiere real, utilizat în practică, constatăm că acest din urmă circuit se apropie cu atît mai mult de un *circuit ideal* cu cît

$$\tau \ll 1. \qquad (6.3.45)$$

Prin urmare, coeficienţii constanţi R şi C, grupaţi prin relaţia (6.3.39), trebuie să verifice condiţia (6.3.45).

Scanned with OKEN Scanner

1. Arsac, J. *Transformation de Fourier et théorie des distributions.* Paris, Dunod, 1961.
2. Bateman, H., Erdélyi, A. *Tables of integral transforms.* Vol I., McGraw-Hill Book Co., Inc., New York-Toronto-London, 1954.
3. Bochner, S. *Vorlesungen über Fouriersche Integrale.* Leipzig, 1932.
4. Bouix, M. *Les fonctions généralisées ou distributions.* Paris, Masson et Cie, 1964.
5. Bremermann, H. *Distributions, complex variables and Fourier transforms.* Addison-Wesley Publ. Co., Reading, Massachusetts, 1965.
6. Cristescu, R. *Elemente de analiză funcțională și introducere în teoria distribuțiilor.* Editura tehnică, București, 1966.
7. Cristescu, R. *Analiză funcțională.* Ed. 2, Editura didact. și ped., București, 1970.
8. Cristescu, R., Marinescu, Gh. *Applications of the theory of distributions.* București, Editura Academiei; London, New York-Sydney-Toronto, John Wiley & Sons, 1973.
9. Dirac, P. A.M. *The principles of quantum mechanics,* Ed. 3, New York, 1947.
10. Ditkin, V. A., Prudnikov, A. P., *Integral transforms and operational calculus.* Oxford-Lodon-Edinburgh-New York-Paris-Frankfurt, Pergamon Press, 1965.
11. Doetsch G. *Handbuch der Laplace Transformation.* Vol. I—III, Basel, Verlag Birkhäuser, 1950—1956.
12. Dunford N., Schwartz J. *Linear operators.* New York, 1968.
13. Fodor G. *Laplace transforms in engineering.* Budapest, Akadémiai Kiado, 1965.
14. Garsoux J. *Espaces vectoriels topologiques et distributions.* Paris, Dunod, 1963.
15. Ghelfand, I. M. Șilov, G. E. *Obobșcionnie funkții.* Vol. I—IV Moscova, Fizmatghiz, 1958—1961.
16. Halperin I., *Introduction to the theory of distributions.* Toronto, 1952.
17. Hörmander, I. *Linear partial differential operators.* Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer-Verlag, 1964.
18. Ivanenko, D., Sokolov, A. *Klassiceskaia teoriia polea (novie problemi).* Moscova-Leningrad, Gostehizdat, 1951.

Scanned with OKEN Scanner

19. Jantscher, L. *Distributionen.* Berlin-New York, Walter de Gruyter, 1971.
20. Kecs, W., Teodorescu, P. P., *Applications of the theory of distributions in mechanics.* Bucureşti, Editura Academiei; Abacus Press, Tunbridge Wells, Kent, 1974.
21. Knechke, A. *Differentialgleichungen und Randwertprobleme.* Vol. I—III, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1960—1962.
22. Lavoine, J. *Calcul symbolique des distributions et des pséudofonctions.* Paris, 1962.
23. Marinescu, Gh. *Espaces vectoriels pseudotopologiques et théorie des distributions.* Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wiss., 1963.
24. Mikusiński, J., *Operational calculus.* Pergamon Press — PWN Polish Sci. Publ., Oxford-London-Edinburgh-New York-Toronto-Sydney-Paris-Braunschweig, 1959.
25. Nicolescu, M. *Analiză matematică.* Vol. I—III, Bucureşti, Editura tehnică, 1957—1960.
26. Olariu, V., *Ecuaţii cu derivate parţiale. Soluţii generalizate.* Vol. I—II, Bucureşti, Editura Universităţii, 1970—1971.
27. Pol, B. van der, Bremmer, H. *Operational calcululs based on the two-sided Laplace integral.* Cambridge at the Univ. Press, 1950.
28. Schwartz, L. *Théorie des distributions.* Vol. I—II, Paris, Hermann, 1950—1951.
29. Schwartz, L. *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques.* Paris, Hermann, 1961.
30. Sneddon, J. *Fourier transforms.* McGraw-Hill Book Co., Inc., New York-Toronto-London, 1951.
31. Sobolev, S. L. *Nekotorîe primeneniia funkţionalnogo analiza v matematiceskoi fizike.* Leningrad, 1950.
32. Sommerfeld, A., *Partielle Differentialgleichungen der Physik.* Leipzig, Ed. 5, Akad. Verlagsgesellschaft Geest Portig K. — G., 1962.
33. Teodorescu, N., Olariu, V. *Ecuaţiile fizicii matematice.* Bucureşti, Editura didactică pedagogică, 1970.
34. Teodorescu, P.P., *Probleme spaţiale în teoria elasticităţii.* Bucureşti, Editura Academiei, 1970.
35. Teodorescu P. P. *Dynamics of linear elastic bodies.* Bucureşti, Editura Academiei; Abacus Press, Tunbridge Wells, Kent, 1975.
36. Tocaci, E. *Fenomene discontinui în mecanica şi rezistenţa materialelor.* Bucureşti, Editura Academiei, 1974.
37. Vladimirov, V. S. *Uravneniia matematiceskoi fiziki.* Moscova, Nauka, 1967.
38. Yosida, K. *Functional analysis.* Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer-Verlag, 1965.
39. Zemanian, A. H. *Distribution theory and transform analysis.* New York-Saint Louis-San Francisco-Toronto-London-Sydney, Mc Graw-Hill Book Co., Inc., 1965.
40. Zemanian, A. H. *Generalized integral transformations.* New York-London-Sydney-Toronto, Intersci. Publ., John Wiley & Sons, Inc., 1968.

Scanned with OKEN Scanner

ÎN SERIA „MATEMATICI MODERNE APLICATE"

AU APĂRUT:

1. **STUART R. D.**
   „Introducere în analiza Fourier, cu aplicații în tehnică" (1971)
2. **JAGER I. C., NEWSTEAD G. H.**
   „Introducere în transformarea Laplace, cu aplicații în tehnică" (1971)
3. **SALVADORI M., BARON, M.**
   „Metode numerice în tehnică" (1972)
4. **CULLMANN G.**
   „Coduri detectoare și corectoare de erori" (1972)
5. **KAUFMANN A., PRÉCIGOUT M.**
   „Elemente de teoria mulțimilor și algebră modernă" vol. I (1973)
6. **TEMAM R.**
   „Metode numerice de rezolvare a ecuațiilor funcționale" (1973)
7. **MOSZYNSKI K.**
   „Metode numerice de rezolvare a ecuațiilor diferențiale ordinare" (1973)
8. **KAUFMANN A., PRÉCIGOUT M.**
   „Elemente de teoria mulțimilor și algebră modernă" vol. II (1973)
9. **FREUDENTHAL H.**
   „Limbajul logicii matematice" (1973)
10. **NEGOIȚĂ C. V., RALESCU D.A.**
    „Mulțimi vagi și aplicațiile lor" (1974)
11. **RUMȘISKI L. Z.**
    „Prelucrarea matematică a datelor experimentale" (1974)
12. **GHIRCOIAȘIU N., MIRON C.**
    „Grafuri de fluență și aplicații în tehnică" (1974)
13. **FORRAY M.**
    „Calculul variațional în știință și tehnică" (1975)
14. **VRACIU G., LEONTE A.**
    „Elemente de calcul matriceal cu aplicații" (1975)
15. **CRISTESCU R.**
    „Elemente de analiză funcțională", ed. a II-a (1975)
16. **KECS W., TEODORESCU P. P.**
    „Introducere în teoria distribuțiilor cu aplicații în tehnică" (1975)

Scanned with OKEN Scanner